共通テスト対策講座 数学ⅡB

この講座は,「大学入学共通テスト 試行調査 数学ⅡB」および「令和２年度大学入試センター試験 数学ⅡB」をベースに，大学入学共通テスト 数学ⅡBで問われる資質・能力がどんなものかを感じ取り，その後の学習に活かしていただくための講座です。

大学入学共通テストの前身であるセンター試験の数学は，問題の設定を理解し，誘導の流れや意図を把握しながら解き進め，そのプロセスおよび結果をマークすることで，大学教育の基礎となる知識・技能や，思考力・判断力・表現力を見る試験でした。別解が他に存在したとしても，限られた時間内にその流れを理解し，正確に計算し，時には立ち止まって整理し，解答に行き着き，マークまでを終える必要があるこのセンター試験の数学に関しては，記述力がある人でも点数がとれない，ということが起こり得る，そんな試験でした。

大学入学共通テストの数学においても，センター試験における出題のねらいを踏襲しつつ，さらに会話で問題を解き進めるプロセスを追体験したり，日常生活に紐付く題材を数学で解決する等，高等学校における「学びの場面」を意識した出題が含まれ，それを「試行試験」を通じて体験することができます。知識や解き方を知っているか，ではなく，その場で問題の中で展開される「初めて見る場面・設定」においても，それまでの学びで得た経験を活かしながら，基本的な知識・技能を適切に活用して解きほぐしていく，そんな力が求められます。まずは，ご紹介している問題を通じて，一緒にそれを解釈していきましょう。

最後に。この講座だけを受講すればよいのではありません。この講座で身につけた数学的な見方・考え方を，センター試験の過去問や，共通テスト向けの問題集，さらには記述式の問題集を解く際に役立てていくことにより，大学入学共通テストで問われる資質・能力がさらに養われていくでしょう。講座の受講は，始まりにすぎません。そして，その始まりは，あなたの輝かしい未来に続く道の歩みの始まりでもあります。何かを見失いそうになったとき，またこの講座に戻ってきてください。いつでも，何度でも，あなたに身につけてほしい観点を語りかけます。

山内 恵介

目　次

第１講　三角関数 ……… p2
第２講　指数・対数関数 ……… p8
第３講　図形と方程式，式と証明 ……… p16
第４講　微分・積分 ……… p24
第５講　数列 ……… p32
第６講　ベクトル ……… p42
第７講　実践演習問題 第１問・第２問 ……… p52
第８講　実践演習問題 第３問・第４問 ……… p64

はじめに　受講の仕方・予習復習の仕方

① 予習について

講座の受講前に「講義問題」を解いてください。1～3の３問構成です。まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。予習をすることで自分の注力して見るべきポイントがわかった状態を作る，これが講義を受ける前に必要な準備です。予習ですべて解けている必要はございません。

② 講義について

予習が完了した状態で，授業動画を見ていただき，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。その際には，予習で整理した「注力して見るべきポイント」に集中しながら，また自分の解法との「差違」を感じながら受講しましょう。

③ 復習について

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習での自分のやり方に満足できた部分はさらなるスピードアップを，できなかったところや新たな観点を身につけたところはそれを確かめるようにゆっくりと。また，忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして，ある大問を最後まで解ききったとき，その大問があなたにどんな資質・能力を要求したのかを，解答全体を見て確認しておきましょう。

そして二回目以降は，できる限り「最高速度」で問題を解いてみましょう。さらに，大問を必ず最後まで通してみましょう。すでに自分でじっくり取り組んだ問題ですので，その流れを追うことでより理解が深まり，また速度と正確性を上げる練習を行うことができます。

④ 講座受講後

講座受講後は，大学入学共通テストを題材として扱う市販の問題集に取り組むとよいでしょう。その場合については，上記①～③と同じように，問題と解くところから復習までじっくり取り組むとよいでしょう。また，「設定や条件を理解し，誘導の流れをつかみ，マークに合わせて解答する」という観点を身につける

には，センター試験の過去問題に取り組むことも効果的です。ただし解くだけに留まらず，大問１問を通じてどのような流れで構成されているのかを，復習時に理解し，くり返し問題に取り組む際にはその流れを意識するとよいでしょう。

第１講　三角関数

1 (1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

となる θ の値の範囲を求めよう。

　加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，①は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって，求める値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

（1は次ページに続く。）

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の 2 次方程式

$25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により

$\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k =$ [ケコ] であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \dfrac{[サ]}{[シ]}$，

$\cos\theta = \dfrac{[ス]}{[セ]}$ である。このとき，θ は [ソ] を満たす。[ソ] に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　　①　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　　②　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　　④　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　　⑤　$\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

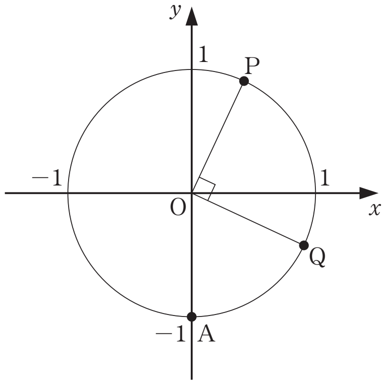
2　O を原点とする座標平面上に，点 A(0，-1) と，中心が O で半径が 1 の円 C がある。円 C 上に y 座標が正である点 P をとり，線分 OP と x 軸の正の部分とのなす角を θ ($0<\theta<\pi$) とする。また，円 C 上に x 座標が正である点 Q を，つねに $\angle \mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。次の問いに答えよ。

(1)　P，Q の座標をそれぞれ θ を用いて表すと

P(ア , イ)

Q(ウ , エ)

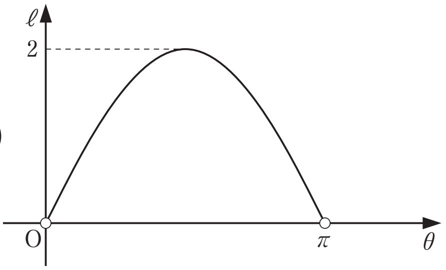
である。 ア ～ エ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

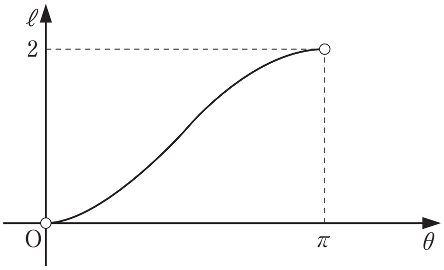


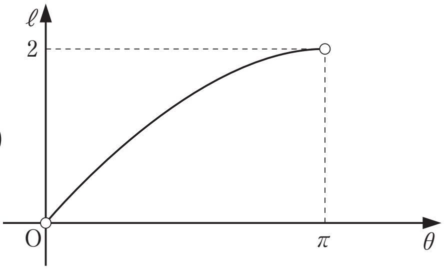
⓪　$\sin\theta$　　①　$\cos\theta$　　②　$\tan\theta$
③　$-\sin\theta$　　④　$-\cos\theta$　　⑤　$-\tan\theta$

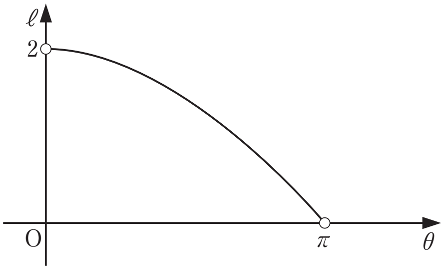
(2は次ページに続く。)

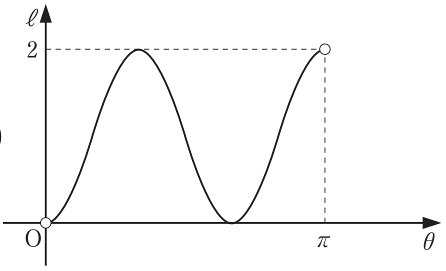
(2)　θ は $0<\theta<\pi$ の範囲を動くものとする。このとき線分 AQ の長さ ℓ は θ の関数である。関数 ℓ のグラフとして最も適当なものを，次の⓪〜⑨のうちから一つ選べ。 **オ**

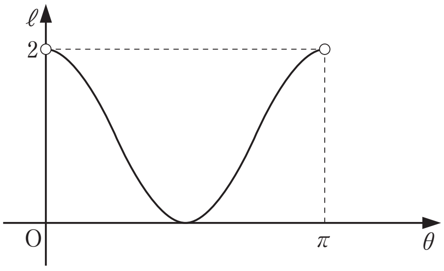
⓪


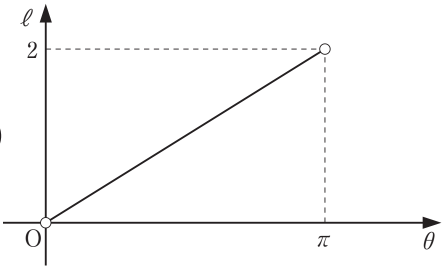
①


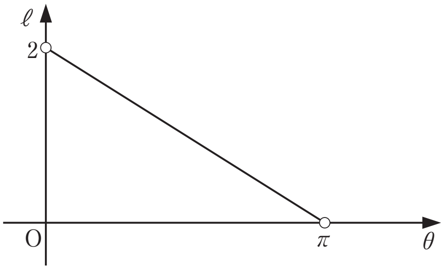
②


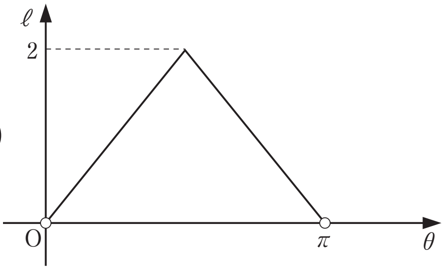
③


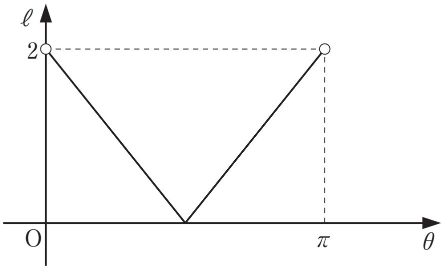
④


⑤


⑥


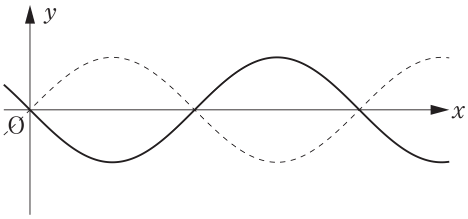
⑦


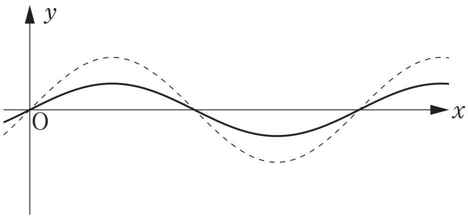
⑧


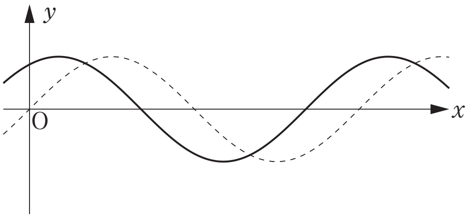
⑨


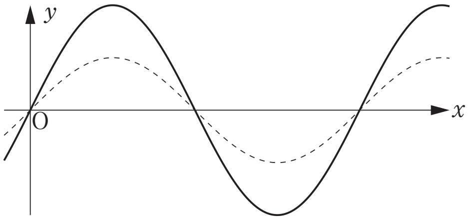
3 (1) 下の図の点線は $y=\sin x$ のグラフである。(i), (ii)の三角関数のグラフが実線で正しくかかれているものを，下の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

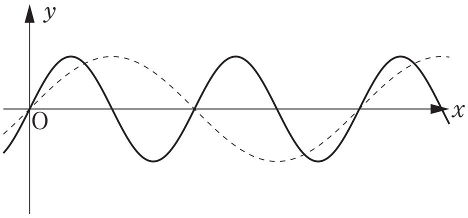
(i) $y=\sin 2x$ ［ア］ (ii) $y=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$ ［イ］

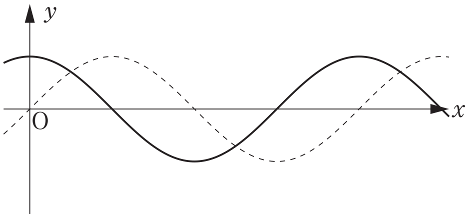
⓪


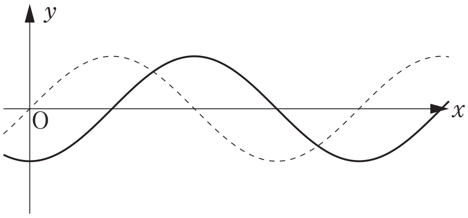
①


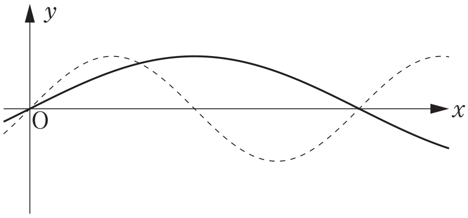
②


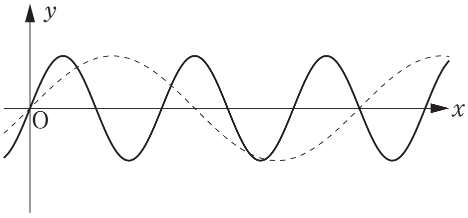
③


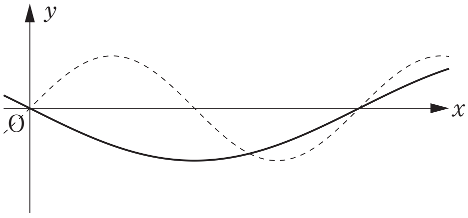
④


⑤


⑥


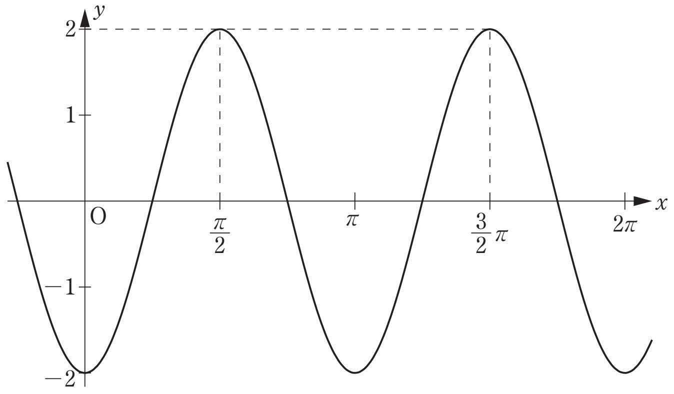
⑦


⑧


⑨


(3は次ページに続く。)

(2)　次の図はある三角関数のグラフである。その関数の式として正しいものを，下の⓪～⑦のうちから**すべて選べ**。 ウ



⓪　$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

①　$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

②　$y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

③　$y=\sin 2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

④　$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

⑤　$y=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

⑥　$y=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

⑦　$y=\cos 2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

第2講　指数・対数関数

1 (1)　t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{アイ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}},\quad t-t^{-1}=\boxed{\text{オカキ}}$$

である。

（1は次ページに続く。）

(2)　x，y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3\left(x\sqrt{y}\right) \leqq 5 & \cdots\cdots① \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

について考える。

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$ とおくと，①は

$\boxed{\text{ク}}\,X+Y \leqq \boxed{\text{ケコ}}$ ……③

と変形でき，②は

$\boxed{\text{サ}}\,X-Y \geqq \boxed{\text{シス}}$ ……④

と変形できる。

X，Y が③と④を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，x，y が①，②と $\log_3 y=\boxed{\text{セ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

2 (1) $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。このとき，$10^{\boxed{ア}} = 2$，$2^{\boxed{イ}} = 10$ となる。

ア，イ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　① 0.3010　② -0.3010

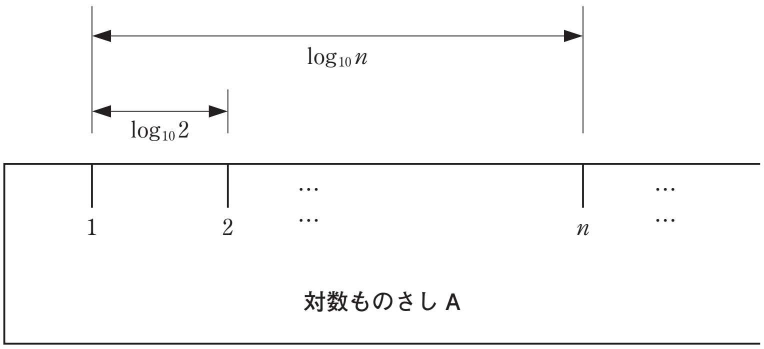
③ 0.6990　④ -0.6990　⑤ $\dfrac{1}{0.3010}$

⑥ $-\dfrac{1}{0.3010}$　⑦ $\dfrac{1}{0.6990}$　⑧ $-\dfrac{1}{0.6990}$

(2) 次のようにして**対数ものさしA**を作る。

対数ものさしA

2以上の整数 n のそれぞれに対して，1の目盛りから右に $\log_{10}n$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(i) **対数ものさしA**において，3の目盛りと4の目盛りの間隔は，1の目盛りと2の目盛りの間隔 ウ 。ウ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

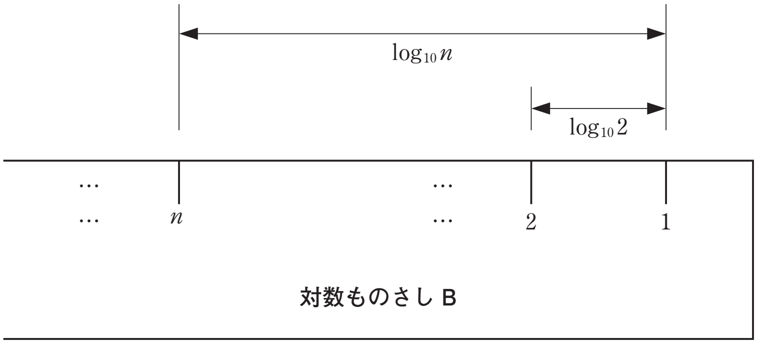
⓪ より大きい　① に等しい　② より小さい

(2は次ページに続く。)

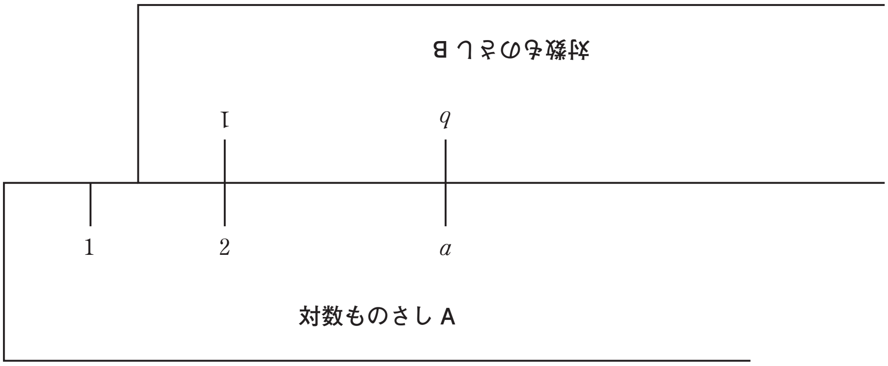
また，次のようにして**対数ものさしB**を作る。

対数ものさしB

2 以上の整数 n のそれぞれに対して，1 の目盛りから左に $\log_{10} n$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(ii)　次の図のように，**対数ものさしA**の 2 の目盛りと**対数ものさしB**の 1 の目盛りを合わせた。このとき，**対数ものさしB**の b の目盛りに対応する**対数ものさしA**の目盛りは a になった。



a と b の関係について，いつでも成り立つ式を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 **エ**

⓪　$a=b+2$　　　①　$a=2b$

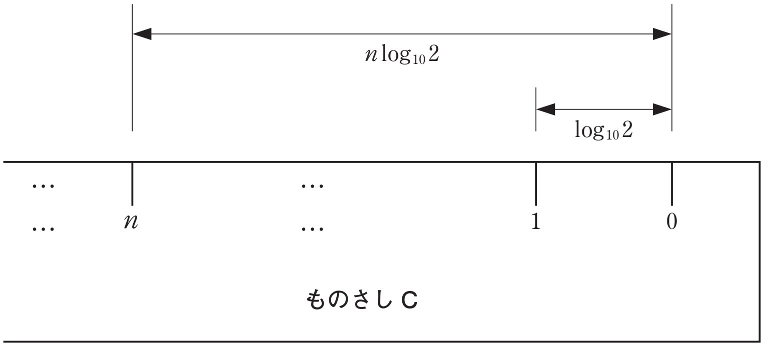
②　$a=\log_{10}(b+2)$　　　③　$a=\log_{10} 2b$

(2は次ページに続く。)

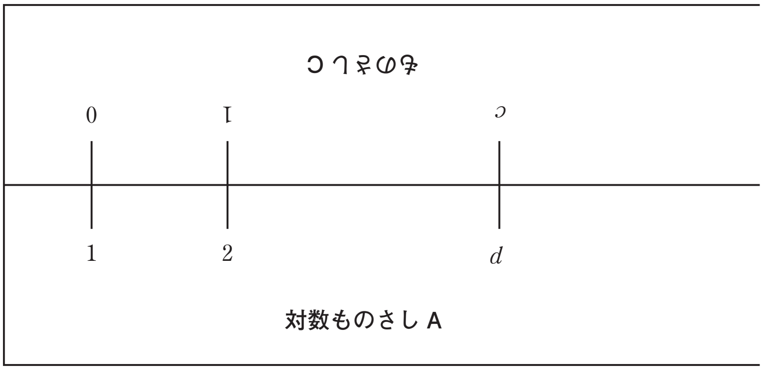
さらに，次のようにして**ものさしC**を作る。

ものさしC

自然数 n のそれぞれに対して，0 の目盛りから左に $n\log_{10}2$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(iii)　次の図のように**対数ものさしA**の 1 の目盛りと**ものさしC**の 0 の目盛りを合わせた。このとき，**ものさしC**の c の目盛りに対応する**対数ものさしA**の目盛りは d になった。



c と d の関係について，いつでも成り立つ式を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 **オ**

⓪　$d=2c$　　①　$d=c^2$

②　$d=2^c$　　③　$c=\log_{10}d$

（2は次ページに続く。）

(iv)　**対数ものさしＡ**と**対数ものさしＢ**の目盛りを一度だけ合わせるか，**対数ものさしＡ**と**ものさしＣ**の目盛りを一度だけ合わせることにする。このとき，適切な箇所の目盛りを読み取るだけで実行できるものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。 カ

⓪　17 に 9 を足すこと。

①　23 から 15 を引くこと。

②　13 に 4 をかけること。

③　63 を 9 で割ること。

④　2 を 4 乗すること。

⑤　$\log_2 64$ の値を求めること。

3　a を１でない正の実数とする。(i)〜(iii)のそれぞれの式について，正しいものを，下の⓪〜③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}=a^2$　　ア

(ii)　$\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}=\dfrac{a^3}{2}$　　イ

(iii)　$4(\log_2 a-\log_4 a)=\log_{\sqrt{2}} a$　　ウ

⓪　式を満たす a の値は存在しない。

①　式を満たす a の値はちょうど一つである。

②　式を満たす a の値はちょうど二つである。

③　どのような a の値を代入しても成り立つ式である。

< NOTE >

第３講　図形と方程式，式と証明

1　100 g ずつ袋詰めされている食品 A と B がある。1 袋あたりのエネルギーは食品 A が 200 kcal，食品 B が 300 kcal であり，1 袋あたりの脂質の含有量は食品 A が 4 g，食品 B が 2 g である。

(1)　太郎さんは，食品 A と B を食べるにあたり，エネルギーは 1500 kcal 以下に，脂質は 16 g 以下に抑えたいと考えている。食べる量 (g) の合計が最も多くなるのは，食品 A と B をどのような量の組合せで食べるときかを調べよう。ただし，一方のみを食べる場合も含めて考えるものとする。

(i)　食品 A を x 袋分，食品 B を y 袋分だけ食べるとする。このとき，x，y は次の条件①，②を満たす必要がある。

摂取するエネルギー量についての条件　[ア]　……①

摂取する脂質の量についての条件　[イ]　……②

[ア]，[イ] に当てはまる式を，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

[ア] の解答群

⓪　$200x+300y \leqq 1500$　　①　$200x+300y \geqq 1500$

②　$300x+200y \leqq 1500$　　③　$300x+200y \geqq 1500$

[イ] の解答群

⓪　$2x+4y \leqq 16$　　①　$2x+4y \geqq 16$

②　$4x+2y \leqq 16$　　③　$4x+2y \geqq 16$

(1は次ページに続く。)

(ii) x，y の値と条件①，②の関係について正しいものを，次の⓪～③のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。［ウ］，［エ］

⓪ $(x,\ y)=(0,\ 5)$ は条件①を満たさないが，条件②は満たす。

① $(x,\ y)=(5,\ 0)$ は条件①を満たすが，条件②は満たさない。

② $(x,\ y)=(4,\ 1)$ は条件①も条件②も満たさない。

③ $(x,\ y)=(3,\ 2)$ は条件①と条件②をともに満たす。

(iii) 条件①，②をともに満たす $(x,\ y)$ について，食品 A と B を食べる量の合計の最大値を二つの場合で考えてみよう。

食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられるような食品のとき，すなわち x，y のとり得る値が実数の場合，食べる量の合計の最大値は［オカキ］g である。このときの $(x,\ y)$ の組は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\ \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)$$ である。

次に，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられないような食品のとき，すなわち x，y のとり得る値が整数の場合，食べる量の合計の最大値は［シスセ］g である。このときの $(x,\ y)$ の組は［ソ］通りある。

(2) 花子さんは，食品 A と B を合計 600 g 以上食べて，エネルギーは 1500 kcal 以下にしたい。脂質を最も少なくできるのは，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられない食品の場合，A を［タ］袋，B を［チ］袋食べるときで，そのときの脂質は［ツテ］g である。

2 (1) 座標平面上に点 A をとる。点 P が放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，線分 AP の中点 M の軌跡を考える。

(i) 点 A の座標が $(0,\ -2)$ のとき，点 M の軌跡の方程式として正しいものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 ア

⓪ $y=x^2-1$　① $y=2x^2-1$　② $y=\frac{1}{2}x^2-1$

③ $y=|x|-1$　④ $y=2|x|-1$　⑤ $y=\frac{1}{2}|x|-1$

(ii) p を実数とする。点 A の座標が $(p,\ -2)$ のとき，点 M の軌跡は(i)の軌跡を x 軸方向に イ だけ平行移動したものである。 イ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\frac{1}{2}p$　① p　② $2p$

③ $-\frac{1}{2}p$　④ $-p$　⑤ $-2p$

(iii) p，q を実数とする。点 A の座標が $(p,\ q)$ のとき，点 M の軌跡と放物線 $y=x^2$ との共有点について正しいものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。

ウ

⓪ $q=0$ のとき，共有点はつねに 2 個である。

① $q=0$ のとき，共有点が 1 個になるのは $p=0$ のときだけである。

② $q=0$ のとき，共有点は 0 個，1 個，2 個のいずれの場合もある。

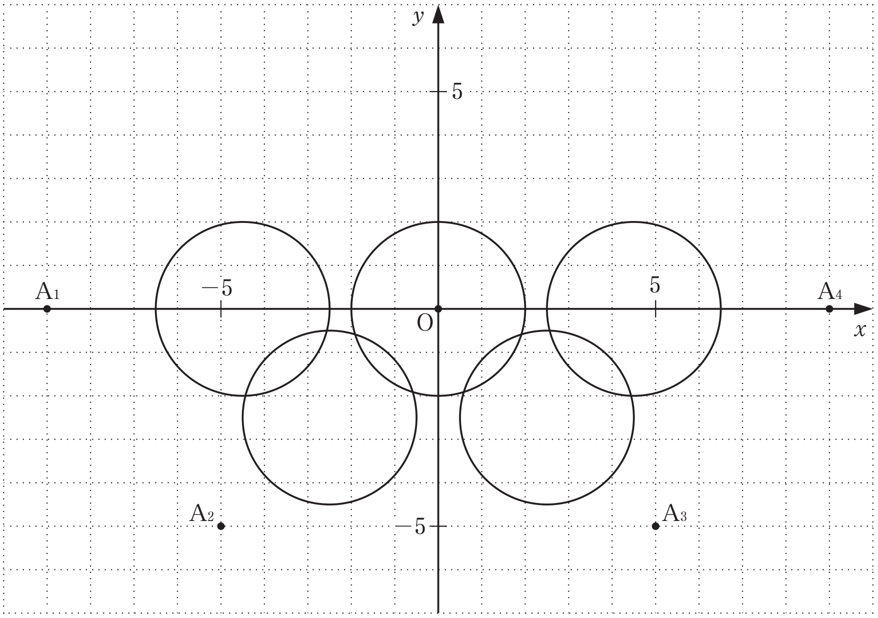
③ $q<p^2$ のとき，共有点はつねに 0 個である。

④ $q=p^2$ のとき，共有点はつねに 1 個である。

⑤ $q>p^2$ のとき，共有点はつねに 0 個である。

(2は次ページに続く。)

(2) ある円 C 上を動く点 Q がある。下の図は定点 O$(0,\ 0)$，$A_1(-9,\ 0)$，$A_2(-5,\ -5)$，$A_3(5,\ -5)$，$A_4(9,\ 0)$ に対して，線分 OQ，A_1Q，A_2Q，A_3Q，A_4Q のそれぞれの中点の軌跡である。このとき，円 C の方程式として最も適当なものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。 エ



⓪ $x^2+y^2=1$　　① $x^2+y^2=2$

② $x^2+y^2=4$　　③ $x^2+y^2=16$

④ $x^2+(y+1)^2=1$　　⑤ $x^2+(y+1)^2=2$

⑥ $x^2+(y+1)^2=4$　　⑦ $x^2+(y+1)^2=16$

3〔1〕 a を定数とする。座標平面上に，原点を中心とする半径5の円 C と，直線 $\ell : x+y=a$ がある。

C と ℓ が異なる2点で交わるための条件は，

$$-\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}<a<\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\quad\cdots\cdots①$$

である。①の条件を満たすとき，C と ℓ の交点の一つを $\mathrm{P}(s,\ t)$ とする。このとき，

$$st=\frac{a^2-\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

＜ NOTE ＞

〔２〕 先生と太郎さんと花子さんは，次の問題とその解答について話している。三人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

【問題】

x，y を正の実数とするとき，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

【解答Ａ】

$x>0$，$\dfrac{1}{y}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$x+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{y}}=2\sqrt{\frac{x}{y}}\ \ \cdots\cdots①$$

$y>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$y+\frac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{\frac{y}{x}}\ \ \cdots\cdots②$$

である。①，②の両辺は正であるから，

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)\geqq 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot 4\sqrt{\frac{y}{x}}=8$$

よって，求める最小値は８である。

【解答Ｂ】

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)=xy+\frac{4}{xy}+5$$

であり，$xy>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$xy+\frac{4}{xy}\geqq 2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}=4$$

である。すなわち，

$$xy+\frac{4}{xy}+5\geqq 4+5=9$$

よって，求める最小値は９である。

（③〔2〕は次ページに続く。）

先生　「同じ問題なのに，解答Ａと解答Ｂで答えが違っていますね。」

太郎　「計算が間違っているのかな。」

花子　「いや，どちらも計算は間違えていないみたい。」

太郎　「答えが違うということは，どちらかは正しくないということだよね。」

先生　「なぜ解答Ａと解答Ｂで違う答えが出てしまったのか，考えてみましょう。」

花子　「実際に x と y に値を代入して調べてみよう。」

太郎　「例えば $x=1$，$y=1$ を代入してみると，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の値は 2×5 だから 10 だ。」

花子　「$x=2$，$y=2$ のときの値は $\dfrac{5}{2}\times4=10$ になった。」

太郎　「$x=2$，$y=1$ のときの値は $3\times3=9$ になる。」

（太郎と花子，いろいろな値を代入して計算する）

花子　「先生，ひょっとして［ア］ということですか。」

先生　「そのとおりです。よく気づきましたね。」

花子　「正しい最小値は［イ］ですね。」

(1)　［ア］に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$xy+\dfrac{4}{xy}=4$ を満たす x，y の値がない

①　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $xy+\dfrac{4}{xy}=4$ を満たす x，y の値がある

②　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $y+\dfrac{4}{x}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす x，y の値がない

③　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $y+\dfrac{4}{x}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす x，y の値がある

(2)　［イ］に当てはまる数を答えよ。

第４講 微分・積分

1 $a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ を C，放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，ℓ を C と D の両方に接する直線とする。

(1) ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t+\boxed{\text{イ}}\right)x-t^2+\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots①$$

である。また，ℓ と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{エ}}\,s-\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}\right)x$$
$$-s^2+\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots②$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t=\boxed{\text{ケ}}$，$s=\boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$ である。

（1は次ページに続く。）

(2)　二つの放物線 C，D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 ℓ，および直線 $x=\boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると，

$S=\dfrac{a^{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C，D と直線 ℓ で囲まれた図形の中で $0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分の面積 T は，$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，a の値によらず

$$T=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\boxed{\text{タ}}$ のとき

$$T=-\boxed{\text{テ}}a^3+\boxed{\text{ト}}a^2-\boxed{\text{ナ}}a+\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(4)　次に，(2)，(3)で定めた S，T に対して，$U=2T-3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき，U は $a=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ をとる。

2　3 次関数 $f(x)$ は，$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとり，$x=3$ で極大値をとる。また，曲線 $y=f(x)$ は点 $(0,\ 2)$ を通る。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ 次関数であり，$f'(x)$ は

$$\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)$$

で割り切れる。

(2)　$f(x)=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^3+\boxed{\text{キ}}x^2+\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}$ である。

(2は次ページに続く。)

(3)　方程式 $f(x)=0$ は，三つの実数解をもち，そのうち負の解は [コ] 個である。

また，$f(x)=0$ の解を a，b，c $(a<b<c)$ とし，曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を S，曲線 $y=f(x)$ の $b \leqq x \leqq c$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

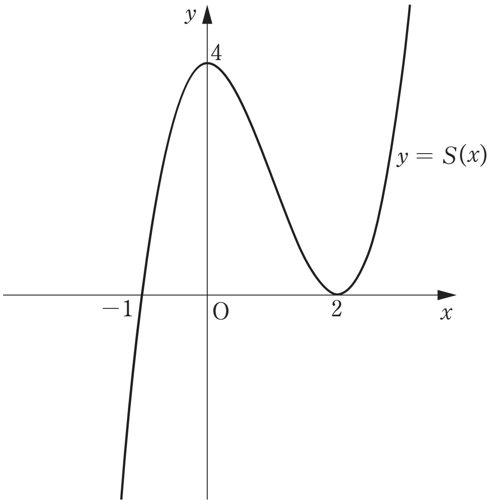
$$\int_a^c f(x)\,dx = \boxed{\text{サ}}$$

である。[サ] に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪ 0	① S	② T	③ $-S$	④ $-T$
⑤ $S+T$	⑥ $S-T$	⑦ $-S+T$	⑧ $-S-T$	

3 a を定数とする。関数 $f(x)$ に対し，$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおく。このとき，関数 $S(x)$ の増減から $y=f(x)$ のグラフの概形を考えよう。

(1) $S(x)$ は 3 次関数であるとし，$y=S(x)$ のグラフは次の図のように，2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を通り，点 $(2,\ 0)$ で x 軸に接しているとする。



このとき，

$$S(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

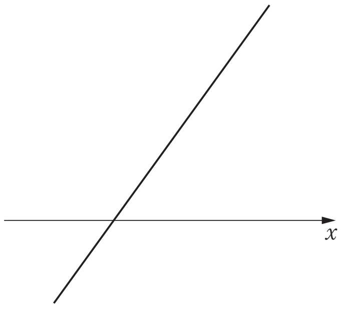
である。$S(a)=\boxed{\text{エ}}$ であるから，a を負の定数とするとき，$a=\boxed{\text{オカ}}$ である。

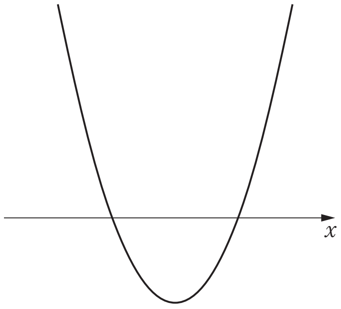
（3は次ページに続く。）

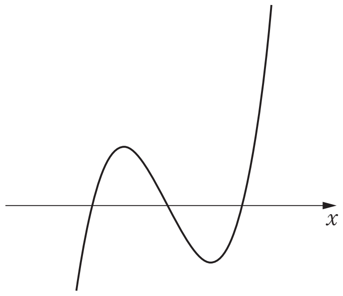
関数 $S(x)$ は $x=$ [キ] を境に増加から減少に移り，$x=$ [ク] を境に減少から増加に移っている。したがって，関数 $f(x)$ について，$x=$ [キ] のとき [ケ] であり，$x=$ [ク] のとき [コ] である。また，
[キ] $<x<$ [ク] の範囲では [サ] である。
[ケ]，[コ]，[サ] については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

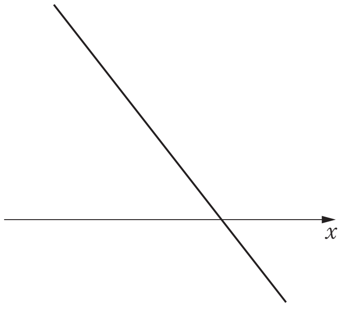
⓪ $f(x)$ の値は 0　　① $f(x)$ の値は正　　② $f(x)$ の値は負
③ $f(x)$ は極大　　④ $f(x)$ は極小

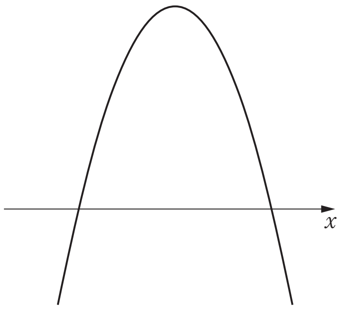
$y=f(x)$ のグラフの概形として最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。[シ]

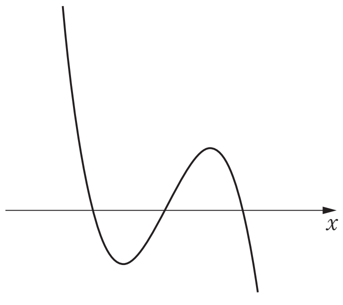
⓪


①


②


③


④


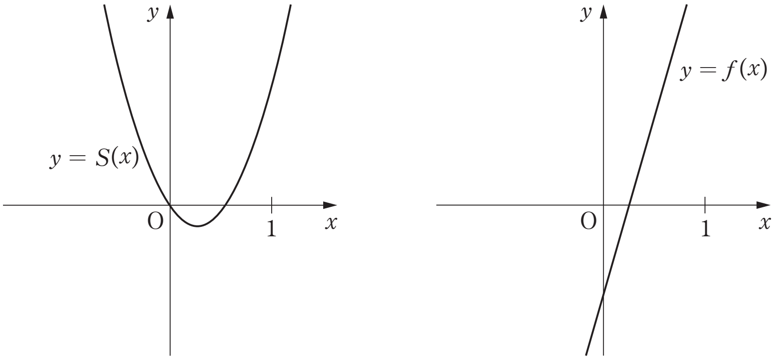
⑤


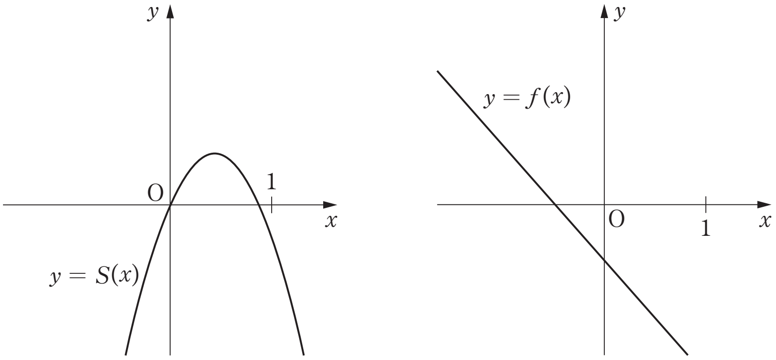
(3は次ページに続く。)

(2)　(1)からわかるように，関数 $S(x)$ の増減から $y=f(x)$ のグラフの概形を考えることができる。

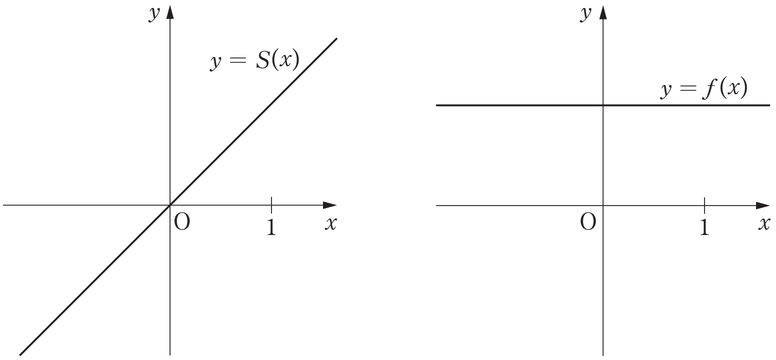
$a=0$ とする。次の⓪〜④は $y=S(x)$ のグラフの概形と $y=f(x)$ のグラフの概形の組である。このうち，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ の関係と**矛盾するもの**を**二つ選べ**。

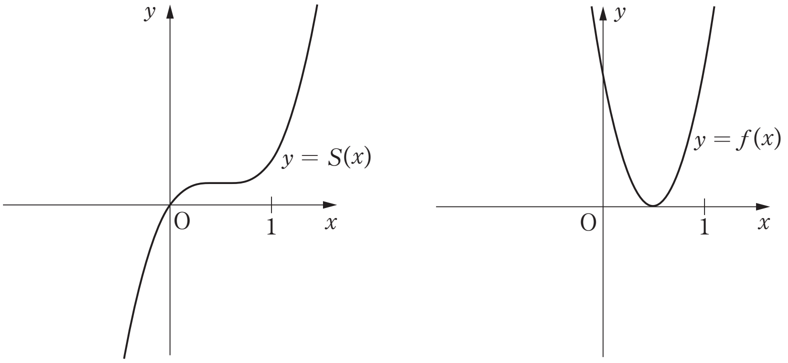
ス

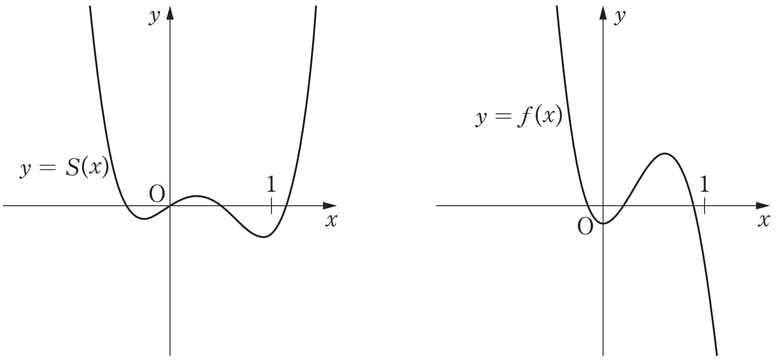
⓪


①


（3は次ページに続く。）

②


③


④


第５講　数列

1　数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1 が 0 であり，$n=1$，2，3，…のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\} \quad \cdots\cdots①$$

(1)　$a_2=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は $\boxed{\text{イ}}$ である。①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)}-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする。

したがって，

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{オ}}}\right)-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

である。

（1は次ページに続く。）

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{キ}}{k+\boxed{エ}}-\frac{\boxed{キ}}{k+\boxed{オ}}\right)=\frac{1}{\boxed{ク}}\left(\frac{n-\boxed{ケ}}{n+\boxed{コ}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}-\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{ソ}}{\boxed{タ}\left(n+\boxed{チ}\right)}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n}$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) (2)により，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{ツ}^{\,n-\boxed{テ}}\left(n^2-\boxed{ト}\right)+\frac{\left(n+\boxed{ナ}\right)\left(n+\boxed{ニ}\right)}{\boxed{ヌ}}$$

で与えらえる。ただし，$\boxed{ナ}<\boxed{ニ}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{ネ}$，$\boxed{ノ}$，$\boxed{ハ}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{ヒ}$ である。

2　太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する問題A，問題Bについて話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

(1)

> **問題A**　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> $$a_1=6,\quad a_{n+1}=3a_n-8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

> 花子：これは前に授業で学習した漸化式の問題だね。まず，k を定数として，
>
> 　　　$a_{n+1}=3a_n-8$ を $a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ の形に変形するといいんだよね。
>
> 太郎：そうだね。そうすると公比が 3 の等比数列に結びつけられるね。

(i)　k の値を求めよ。

$k=$ ［ア］

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_n=$ ［イ］・［ウ］$^{n-1}+$［エ］

(**2**は次ページに続く。)

(2)

問題B　次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_1=4,\ b_{n+1}=3b_n-8n+6\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

花子：求め方の方針が立たないよ。

太郎：そういうときは，$n=1$，2，3 を代入して具体的な数列の様子をみてみよう。

花子：$b_2=10$，$b_3=20$，$b_4=42$ となったけど…。

太郎：階差数列を考えてみたらどうかな。

数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{p_n\}$ を，$p_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。

(i) p_1 の値を求めよ。

$p_1=$ [オ]

(ii) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

$p_{n+1}=$ [カ] p_n- [キ]

(iii) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

$p_n=$ [ク] $\cdot$ [ケ]$^{n-1}+$ [コ]

(2は次ページに続く。)

(3) 二人は**問題B**について引き続き会話をしている。

太郎：解ける道筋はついたけれど，漸化式で定められた数列の一般項の求め方は一通りではないと先生もおっしゃっていたし，他のやり方も考えてみようよ。 花子：でも，授業で学習した問題は，**問題A**のタイプだけだよ。 太郎：では，**問題A**の式変形の考え方を**問題B**に応用してみようよ。**問題B**の漸化式 $b_{n+1}=3b_n-8n+6$ を，定数 s，t を用いて $\boxed{\text{サ}}=3\left(\boxed{\text{シ}}\right)$ の式に変形してはどうかな。

(i) $q_n=\boxed{\text{シ}}$ とおくと，太郎さんの変形により数列 $\{q_n\}$ が公比 3 の等比数列とわかる。このとき，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまる式を，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ b_n+sn+t

① $b_{n+1}+sn+t$

② $b_n+s(n+1)+t$

③ $b_{n+1}+s(n+1)+t$

(ii) s，t の値を求めよ。

$s=\boxed{\text{スセ}}$，$t=\boxed{\text{ソ}}$

（②は次ページに続く。）

(4)　**問題B**の数列は，(2)の方法でも(3)の方法でも一般項を求めることができる。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_n = \boxed{\text{タ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{チ}}\,n - \boxed{\text{ツ}}$$

(5)　次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある。

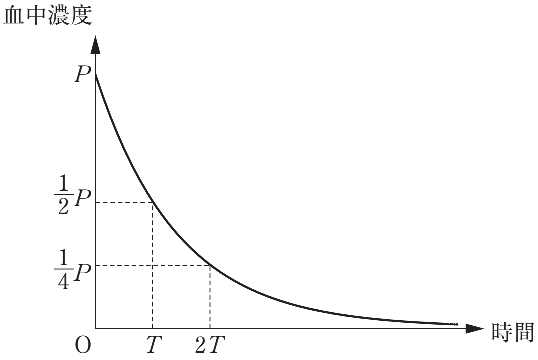
$$c_1 = 16,\quad c_{n+1} = 3c_n - 4n^2 - 4n - 10 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$$c_n = \boxed{\text{テ}} \cdot \boxed{\text{ト}}^{\,n-1} + \boxed{\text{ナ}}\,n^2 + \boxed{\text{ニ}}\,n + \boxed{\text{ヌ}}$$

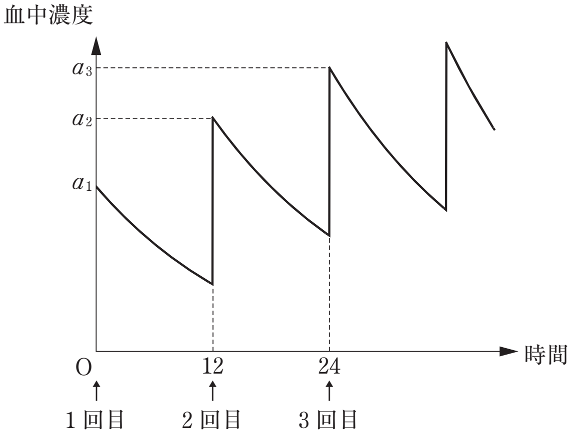
3 次の文章を読んで，下の問いに答えよ。

ある薬Dを服用したとき，有効成分の血液中の濃度（血中濃度）は一定の割合で減少し，T 時間が経過すると $\frac{1}{2}$ 倍になる。薬Dを1錠服用すると，服用直後の血中濃度は P だけ増加する。時間0で血中濃度が P であるとき，血中濃度の変化は次のグラフで表される。適切な効果が得られる血中濃度の最小値を M，副作用を起こさない血中濃度の最大値を L とする。



薬Dについては，$M=2$，$L=40$，$P=5$，$T=12$ である。

(1) 薬Dについて，12時間ごとに1錠ずつ服用するときの血中濃度の変化は次のグラフのようになる。



（3は次ページに続く。）

n を自然数とする。a_n は n 回目の服用直後の血中濃度である。a_1 は P と一致すると考えてよい。第 $(n+1)$ 回目の服用直前には，血中濃度は第 n 回目の服用直後から時間の経過に応じて減少しており，薬を服用した直後に血中濃度が P だけ上昇する。この血中濃度が a_{n+1} である。

$P=5$，$T=12$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の初項と漸化式は

$$a_1=\boxed{\text{ア}},\quad a_{n+1}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a_n+\boxed{\text{エ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう。

【考え方1】

数列 $\{a_n-d\}$ が等比数列となるような定数 d を求める。$d=\boxed{\text{オカ}}$ に対して，数列 $\{a_n-d\}$ が公比 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ の等比数列になることを用いる。

【考え方2】

階差数列をとって考える。数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が公比 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の等比数列になることを用いる。

いずれの考え方を用いても，一般項を求めることができ，

$$a_n=\boxed{\text{サシ}}-\boxed{\text{ス}}\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(3は次ページに続く。)

(2) 薬Dについては，$M=2$，$L=40$ である。薬Dを12時間ごとに1錠ずつ服用する場合，n 回目の服用直前の血中濃度が a_n-P であることに注意して，正しいものを，次の⓪～⑤のうちから二つ選べ。 タ

⓪ 4回目の服用までは血中濃度が L を超えないが，5回目の服用直後に血中濃度が L を超える。

① 5回目の服用までは血中濃度が L を超えないが，服用し続けるといつか必ず L を超える。

② どれだけ継続して服用しても血中濃度が L を超えることはない。

③ 1回目の服用直後に血中濃度が P に達して以降，血中濃度が M を下回ることはないので，1回目の服用以降は適切な効果が持続する。

④ 2回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが，2回目の服用以降は，血中濃度が M を下回ることはないので，適切な効果が持続する。

⑤ 5回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが，5回目の服用以降は，血中濃度が M を下回ることはないので，適切な効果が持続する。

(3) (1)と同じ服用量で，服用間隔の条件のみを24時間に変えた場合の血中濃度を調べよう。薬Dを24時間ごとに1錠ずつ服用するときの，n 回目の服用直後の血中濃度を b_n とする。n 回目の服用直前の血中濃度は b_n-P である。最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度である $a_{2n+1}-P$ と $b_{n+1}-P$ を比較する。$b_{n+1}-P$ と $a_{2n+1}-P$ の比を求めると，

$$\frac{b_{n+1}-P}{a_{2n+1}-P}=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(3は次ページに続く。)

(4) 薬Dを24時間ごとにk錠ずつ服用する場合には，最初の服用直後の血中濃度はkPとなる。服用量を変化させてもTの値は変わらないものとする。

薬Dを12時間ごとに1錠ずつ服用した場合と24時間ごとにk錠ずつ服用した場合の血中濃度を比較すると，最初の服用から$24n$時間経過後の各服用直前の血中濃度が等しくなるのは，$k=$ テ のときである。したがって，24時間ごとにk錠ずつ服用する場合の各服用直前の血中濃度を，12時間ごとに1錠ずつ服用する場合の血中濃度以上とするためには$k\geqq$ テ でなくてはならない。

また，24時間ごとの服用量を テ 錠にするとき，正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ト

⓪　1回目の服用以降，服用直後の血中濃度が常にLを超える。

①　4回目の服用直後までの血中濃度はL未満だが，5回目以降は服用直後の血中濃度が常にLを超える。

②　9回目の服用直後までの血中濃度はL未満だが，10回目以降は服用直後の血中濃度が常にLを超える。

③　どれだけ継続して服用しても血中濃度がLを超えることはない。

第6講　ベクトル

1　点Oを原点とする座標空間に2点

$$\mathrm{A}(3,\ 3,\ -6),\quad \mathrm{B}(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$$

をとる。3点O，A，Bの定める平面をαとする。また，αに含まれる点Cは

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24 \quad \cdots\cdots①$$

を満たすとする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=$ ［ア］$\sqrt{［イ］}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=$ ［ウ］$\sqrt{［エ］}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ ［オカ］ である。

(2)　点Cは平面α上にあるので，実数s，tを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表すことができる。このとき，①から$s=\dfrac{［キク］}{［ケ］}$，$t=$ ［コ］ である。したがって，

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=$ ［サ］$\sqrt{［シ］}$ である。

（1は次ページに続く。）

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(\boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソタ}}\right)$ である。したがって，平面 α 上の四角形 OABC は $\boxed{\text{チ}}$。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

⓪ 正方形である
① 正方形ではないが，長方形である
② 長方形ではないが，平行四辺形である
③ 平行四辺形ではないが，台形である
④ 台形ではない

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるので，四角形 OABC の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

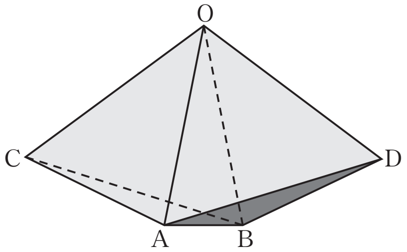
(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ かつ z 座標が 1 であるような点 D の座標は

$$\left(\boxed{\text{ト}}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\ \boxed{\text{ヌ}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ 1\right)$$

である。このとき $\angle\mathrm{COD}=\boxed{\text{ハヒ}}^\circ$ である。

3 点 O，C，D の定める平面を β とする。α と β は垂直であるので，三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは $\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ である。したがって，四面体 DABC の体積は $\boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

2 (1) 右の図のような立体を考える。ただし，六つの面 OAC, OBC, OAD, OBD, ABC, ABD は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。この立体の ∠COD の大きさを調べたい。



線分 AB の中点を M，線分 CD の中点を N とおく。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(i) 次の [ア] ～ [エ] に当てはまる数を求めよ。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{[ア]}{[イ]}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{ON}=\frac{[ア]}{[イ]}(\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{[ウ]}{[エ]}$$

(ii) 3 点 O, N, M は同一直線上にある。内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}$ の値を用いて，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ を満たす k の値を求めよ。

$$k=\frac{[オ]}{[カ]}$$

(2は次ページに続く。)

(iii)　$\angle \mathrm{COD}=\theta$ とおき，$\cos\theta$ の値を求めたい。次の**方針１**または**方針２**について，［キ］～［シ］に当てはまる数を求めよ。

方針１

$\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\vec{d}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$$

であり，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\cos\theta$ から $\cos\theta$ が求められる。

方針２

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ のなす角を考えると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ が成り立つ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}+\frac{1}{2}\cos\theta$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|$ の値を用いると，

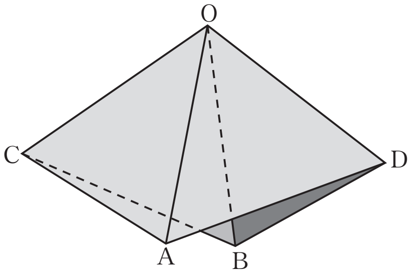
$\cos\theta$ が求められる。

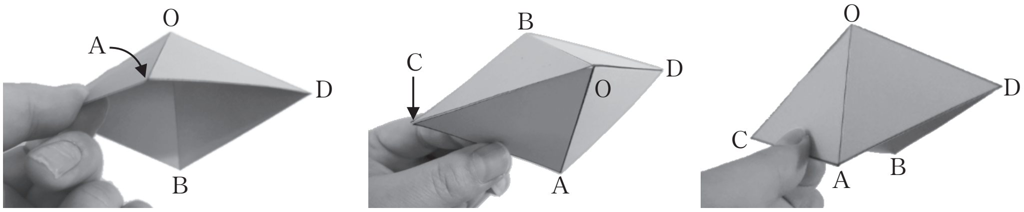
(iv)　**方針１**または**方針２**を用いて $\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

（２は次ページに続く。）

(2)　(1)の図形から，四つの面OAC，OBC，OAD，OBDだけを使って，下のような図形を作成したところ，この図形は∠AOBを変化させると，それにともなって∠CODも変化することがわかった。





∠AOB＝α，∠COD＝βとおき，$\alpha>0$，$\beta>0$とする。このときも，線分ABの中点と線分CDの中点および点Oは一直線上にある。

（2は次ページに続く。）

(i) α と β が満たす関係式は(1)の**方針 2** を用いると求めることができる。その関係式として正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 [タ]

⓪ $\cos\alpha+\cos\beta=1$

① $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=1$

② $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=-1$

③ $(1+2\cos\alpha)(1+2\cos\beta)=\dfrac{2}{3}$

④ $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\dfrac{2}{3}$

(ii) $\alpha=\beta$ のとき，$\alpha=$ [チツ]° であり，このとき，点 D は [テ] にある。

[チツ] に当てはまる数を求めよ。また，[テ] に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 平面 ABC に関して O と同じ側

① 平面 ABC 上

② 平面 ABC に関して O と異なる側

3　四面体OABCについて，OA⊥BCが成り立つための条件を考えよう。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, 0, 1)，C(0, 1, 1)のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア となる。$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=$ イ によりOA⊥BCである。

(2) 四面体OABCについて，OA⊥BCとなるための必要十分条件を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ウ

⓪ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$　　① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

② $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　③ $|\vec{a}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3は次ページに続く。)

(3)　OA⊥BC が常に成り立つ四面体を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 エ

⓪　OA＝OB かつ ∠AOB＝∠AOC であるような四面体 OABC

①　OA＝OB かつ ∠AOB＝∠BOC であるような四面体 OABC

②　OB＝OC かつ ∠AOB＝∠AOC であるような四面体 OABC

③　OB＝OC かつ ∠AOC＝∠BOC であるような四面体 OABC

④　OC＝OA かつ ∠AOC＝∠BOC であるような四面体 OABC

⑤　OC＝OA かつ ∠AOB＝∠BOC であるような四面体 OABC

（3は次ページに続く。）

(4) OC＝OB＝AB＝AC を満たす四面体 OABC について，OA⊥BC が成り立つことを下のように証明した。

【証明】

線分 OA の中点を D とする。

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}$ により

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left\{\left|\boxed{\text{オ}}\right|^2-\left|\boxed{\text{カ}}\right|^2\right\}$ である。

また，$\left|\boxed{\text{オ}}\right|=\left|\boxed{\text{カ}}\right|$ により $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ である。

同様に，$\boxed{\text{キ}}$ により $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ である。

このことから $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD})=0$ により OA⊥BC である。

(i) $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちからそれぞれ一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\overrightarrow{BA}$　① $\overrightarrow{BC}$　② $\overrightarrow{BD}$　③ $\overrightarrow{BO}$

(ii) $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CB}|$　① $|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CA}|$　② $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

③ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$　④ $|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{BA}|$

(3は次ページに続く。)

(5) (4)の証明は，OC＝OB＝AB＝AC のすべての等号が成り立つことを条件として用いているわけではない。このことに注意して，OA⊥BC が成り立つ四面体を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ク

⓪ OC＝AC かつ OB＝AB かつ OB≠OC であるような四面体 OABC

① OC＝AB かつ OB＝AC かつ OC≠OB であるような四面体 OABC

② OC＝AB＝AC かつ OC≠OB であるような四面体 OABC

③ OC＝OB＝AC かつ OC≠AB であるような四面体 OABC

第７講　実践演習問題 第１問・第２問

第１問

〔１〕

(1)　x^2-4x+7 を $x-1$ で割ると商は $x-$ ア ，余りは イ である。

(2)　$x>1$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}$ とする。

$\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}$ の分母，分子を $x-1$ で割って， ウ を利用すると，

θ は $x=$ エ のとき　最小値 $\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}\pi$ をとる。

ウ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

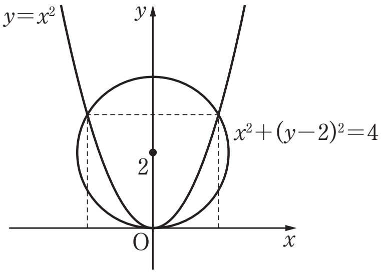
⓪　相加平均・相乗平均の大小関係　　①　因数定理

②　剰余の定理　　③　余弦定理

＜ NOTE ＞

〔２〕 座標平面上に放物線 L：$y=x^2$ と円 C：$x^2+(y-a)^2=4$ がある。ただし，a は定数とする。放物線 L と円 C の共有点の個数について考える。

(1) $a=2$ のとき，放物線 L と円 C の共有点の個数を求めるには $y=x^2$ を $x^2+(y-2)^2=4$ に代入し，2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ を解けばよい。このとき ［キ］ あることから，共有点の個数は 3 個となる。



［キ］ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が正の数と負の数が 1 つずつ

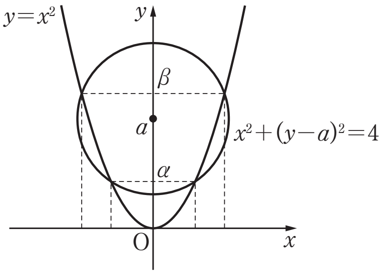
① 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が異なる正の数が 3 つ

② 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が 0 と正の数が 1 つ

③ 2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が異なる正の数が 2 つ

(第１問〔２〕は次ページに続く。)

(2) 放物線 L と円 C の共有点が 4 個あるための条件を，以下のようにして求めた。



$y=x^2$ を $x^2+(y-a)^2=4$ に代入し，整理すると

$$y^2-(2a-1)y+a^2-4=0 \quad \cdots①$$

となった。

①の判別式を D，2 つの解を α，β とすると，

4 個の共有点をもつためには，［ク］が成り立てばよい。

［ク］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $D \geqq 0$

① $D \geqq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

② $D \geqq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta \geqq 0$

③ $D \geqq 0$，$\alpha+\beta \geqq 0$，$\alpha\beta>0$

④ $D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

⑤ $D>0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

〔３〕 先生と太郎さんと花子さんが音の大きさについて会話している。三人の会話を読み，下の問いに答えよ。

> 太郎さん：音の大きさを測るのにdb(デシベル)があったね。
>
> 花子さん：習った気がするけれど，dbって何だっけ？
>
> 先生：dbは次のように定められています。「人間が聞くことができる限界の音圧を x_0，測定している音の音圧を x としたとき，測定している音の大きさ y db は $y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ と表される」でした。
>
> 花子さん：確か，静かな図書館は40db，地下鉄の車内は80dbと聞いた気がする。
>
> 太郎さん：だったら，家で掃除しているときの掃除機の音は60db位かな。
>
> 先生：人の呼吸音は10dbですが，呼吸音の音圧は x_0 の [ケ] 倍になります。

(1) [ケ] に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{20}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{20}$

（第１問〔３〕は次ページに続く。）

(2)

花子さん：静かな図書館は 40 db，地下鉄の車内は 80 db だから，音の大きさは 2 倍だけれど，音圧は何倍になっているのかしら？
太郎さん：静かな図書館，地下鉄の車内の音圧をそれぞれ x_1，x_2 とし，x_1，x_2 を x_0 で表して考えればいいね。
花子さん：x_1，x_2 を x_0 で表さなくても，できるんじゃないかしら？
先生：どちらの方法でも求められますね。

地下鉄の車内の音圧は静かな図書館の音圧の［コ］倍である。［コ］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 2　① 4　② $\log_{10}2$　③ $\log_{10}4$　④ 10　⑤ 100

（第１問〔３〕は次ページに続く。）

(3)

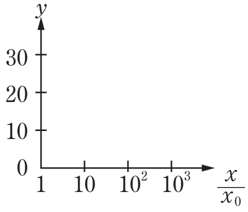
太郎さん：ジェット機の音は相当大きいだろうな。

花子さん：120 db だと聞いたことがあるわ。

太郎さん：音圧は数式 $120=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ を解いて，$x=10^6x_0$ となるね。ものすごく大きな値で，ちょっと計算が大変そうだな。

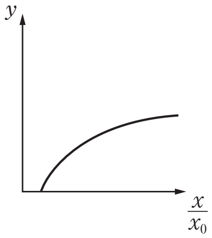
花子さん：そうね。これから先，いろいろな音の大きさ db と音圧の関係を計算するのに，いい方法はないかしら？

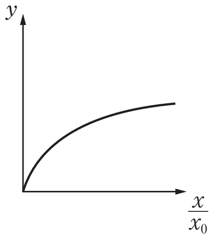
先生：座標軸の横軸に $\dfrac{x}{x_0}$ を 1 目盛りごとに 1 から始めて 10，10^2，10^3，…ととり，縦軸に y を 1 目盛りごとに 0 から始めて 10，20，30，…ととって（右図），関数 $y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ のグラフをかくと［サ］となります。

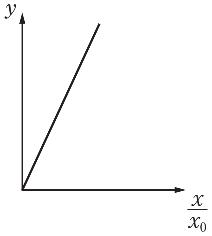


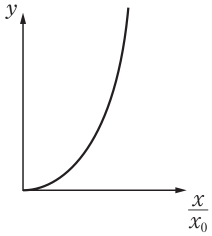
花子さん：なるほど，そのグラフを利用すると，簡単に求められそうです。

［サ］に適するものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 

① 

② 

③ 

このグラフを利用すると，ジェット機の音圧は静かな図書館の音圧の［シ］倍であることが分かる。

［シ］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 10　① 10^2　② 10^3　③ 10^4　④ 10^5　⑤ 10^6

< NOTE >

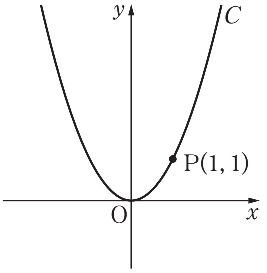
第２問

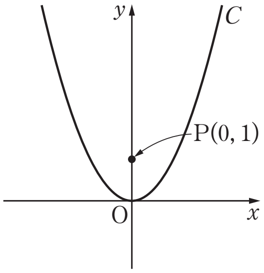
座標平面上に放物線 $C：y=x^2$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ がある。

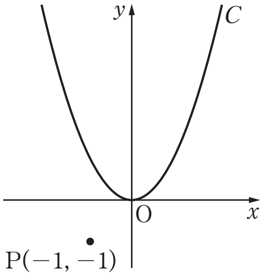
点Pを通る直線と放物線 C で囲まれた部分の面積が最小となるのは，どのような場合かを以下のように考えた。

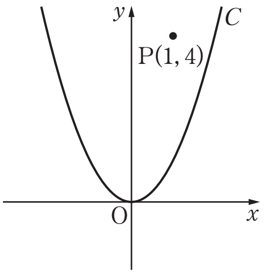
ただし，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は不等式 $s^2-t<0$ の表す領域にあるとし，点Pを通る直線は y 軸と平行ではないものとする。

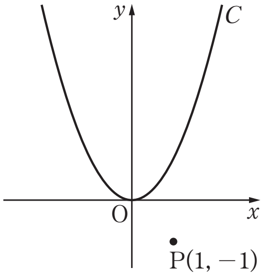
(1)　点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が⓪～⑤の各座標のとき，不等式 $s^2-t<0$ を満たすものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。　［ア］

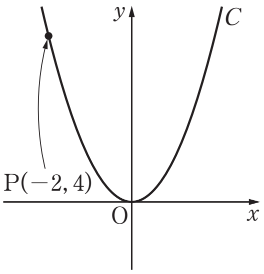
⓪


①


②


③


④


⑤


（第２問は次ページに続く。）

(2)　点 P$(s,\ t)$ を通り，傾きが m である直線 ℓ の方程式は［イ］である。

(1)における点 P の存在位置から，直線 ℓ と放物線 C は異なる 2 点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$，B$(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ で交わることが分かる。このとき，α，β を解とする 2 次方程式は［ウ］であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\boxed{エ},\quad \alpha\beta=\boxed{オ}$$

となる。

［イ］，［ウ］，［エ］，［オ］に当てはまる式を，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

［イ］の解答群

⓪ $y=mx+s+t$　　① $y=mx-ms+t$

② $y=mx+ms+t$　　③ $y=mx+ms-t$

［ウ］の解答群

⓪ $x^2-mx+ms-t=0$　　① $x^2-mx-s-t=0$

② $x^2-mx-ms+t=0$　　③ $x^2-mx-ms-t=0$

［エ］の解答群

⓪ ms　　① mt

② $-m$　　③ m

［オ］の解答群

⓪ $-ms+t$　　① $ms-t$

② t　　③ $m(ms-t)$

（第２問は次ページに続く。）

(3)　点Pを通り，傾きが m である直線 ℓ と放物線 C で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とおく。

定積分 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を利用すると

$$S(m)=\frac{\left(m^{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\,ms+\boxed{\text{ク}}\,t\right)^{\frac{3}{2}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

となる。

3点A，B，Pは一直線上にあるから，面積 $S(m)$ が最小になるときの点Pについて [コ] がいえる。

[コ] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　点Pは線分ABと y 軸との交点である。

①　点Pは線分ABと ∠AOB の二等分線との交点である。

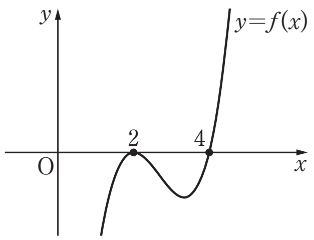
②　点Pは線分ABを 2 : 1 に内分する点である。

③　点Pは線分ABの中点である。

④　点Pは直線ABと直線OPが垂直となるような点である。

(第２問は次ページに続く。)

(4) 面積 $S(m)$ が最小になるときの直線 ℓ の方程式を $y=ax+b$ (a, b は定数)とする。
3 次関数 $y=x^3-cx^2+18x-15$ (c は定数)のグラフを L とし，$f(x)=(x^3-cx^2+18x-15)-(ax+b)$ とおくと，関数 $f(x)$ のグラフは右図のようになった。



(i) 図から読み取れる記述として正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 サ

⓪ 直線 ℓ と曲線 L は，$x<4$ の範囲で異なる 3 個の共有点をもつ。
① 直線 ℓ は，曲線 L より $x<4$ の範囲で常に上側にある。
② 直線 ℓ と曲線 L は，$2<x<4$ の範囲で異なる 2 個の共有点をもつ。
③ 直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が 2 である点で接する。
④ 直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が 2 と 4 である点で接する。

(ii) (i)より，$f(x)=$ シ とおくことができるから，a, b, c の値を求めると

$a=$ スセ ，$b=$ ソ ，$c=$ タ

となる。
このとき，点 P の座標は (チツ ， テ) である。
シ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $(x-2)^2(x-4)$
① $(x+2)^2(x+4)$
② $(x-2)(x-4)^2$
③ $(x-2)(x-3)(x-4)$
④ $a(x-2)^2(x-4)$

第8講 実践演習問題 第3問・第4問

第3問

太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する問題 A〜C について話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

(1)

> 問題A 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> $$a_1=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

> 太郎：教科書で習った漸化式の形と違って，分数式になっていて難しそうだな。
>
> 花子：$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいてみたらどうかしら？
>
> 太郎：［ア］となったよ。これは教科書で習った形だよね。
>
> 花子：数列 $\{b_n\}$ は初項［イ］，公差［ウ］の等差数列と分かるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$［エ］と求まるわね。

(i) ［ア］に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$　① $b_{n+1}=b_n+3$　② $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+3$

③ $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{3}$　④ $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n}+3$　⑤ $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{3}$

(ii) ［イ］，［ウ］に当てはまる数を求めよ。

(iii) ［エ］に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $3n-1$　① $3n+1$　② $\dfrac{1}{3n-5}$

③ $\dfrac{1}{3n+5}$　④ $\dfrac{1}{3n-1}$　⑤ $\dfrac{1}{3n+1}$

（第３問は次ページに続く。）

(2)

問題B　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{1-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

花子：問題A と少し形が違うわね。

太郎：$a_1=3$ だから，$a_n=0$ となることはないから，両辺の逆数をとってみたらどうかな。

花子：［オ］ となったわよ。

太郎：$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて，問題A のようにして解けばいいんだね。

花子：数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$［カ］ と求まるわね。

太郎：ここで考えたことを利用すると，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{a_n}$ の和も求まりそうだね。

(i) ［オ］ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n-\dfrac{1}{a_n}$　① $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-a_n$　② $\dfrac{1}{a_{n+1}}=1-\dfrac{1}{a_n}$

③ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-1$　④ $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$　⑤ $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}-1$

(ii) ［カ］ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{3}{4+3n}$　① $\dfrac{3}{3n-4}$　② $\dfrac{3}{2-3n}$

③ $\dfrac{3}{4-3n}$　④ $\dfrac{3}{4n+3}$　⑤ $\dfrac{3}{3-4n}$

(iii) $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{a_n}$ の和を求めると

$$\frac{(\boxed{キ}-3n)\boxed{ク}^{\,n}-\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

となる。

(第３問は次ページに続く。)

(3) 二人は問題Ａ，Ｂで考えたことを応用する問題Ｃについて会話をしている。

問題Ｃ　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=\frac{6}{5},\quad a_{n+1}=-\frac{a_n-1}{6a_n-10}+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

花子：今までの漸化式と式の形が違うわね。どう解けばいいのかしら？

太郎：問題Ｂ の漸化式の分子は a_n だけだったね。

花子：だったら，$b_n=a_n-$ サ とおいて，変形するといいんじゃないかしら？

太郎：$b_{n+1}=$ シ となったよ。

花子：問題Ｂ でやったように，両辺の逆数をとって $c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおけばいいわね。

太郎：$c_{n+1}=$ ス となるね。ここからは教科書で習ったように $c_{n+1}-2=4(c_n-2)$ と変形すると，数列 $\{c_n-2\}$ は セ であることから，$c_n=$ ソ $\cdot 4^{n-1}+$ タ と求まるよ。

花子：あとは，c_n，b_n，a_n の順に求めていけば，a_n を n の式で表すことができるね。

(i) サ に当てはまる数を求めよ。

(ii) シ に当てはまる式を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{b_n}{b_n-4}$　① $\dfrac{b_n}{4-6b_n}$　② $\dfrac{b_n}{16-6b_n}$

③ $\dfrac{b_n}{16+6b_n}$　④ $-\dfrac{b_n-1}{6b_n-10}$　⑤ $\dfrac{4-6b_n}{b_n}$

(iii) ス に当てはまる式を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $4c_n+6$　① $4c_n-6$　② $-4c_n+6$

③ $-4c_n-6$　④ $\dfrac{1}{4c_n+6}$　⑤ $\dfrac{1}{4c_n-6}$

（第３問は次ページに続く。）

(iv) [セ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 初項 3，公比 4 の等比数列　　① 初項 5，公比 4 の等比数列

② 初項 3，公差 4 の等差数列　　③ 初項 5，公差 4 の等差数列

(v) [ソ]，[タ] に当てはまる数を求めよ。

(vi) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_n = \frac{4}{[\text{チ}]\cdot[\text{ツ}]^n + [\text{テ}]} + [\text{ト}]$$

第４問

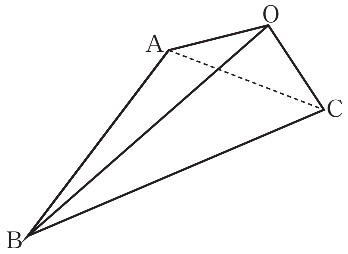
右の図のような四面体 OABC がある。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ であるとき，

次の問いに答えよ。



(1)　四面体 OABC の体積 V を，以下のようにして求めた。

(i)　△ABC において，∠BAC$=\theta$ とおくと

$|\overrightarrow{AB}|=$ [ア]，$|\overrightarrow{AC}|=$ [イ]

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ [ウ]

であるから

$\cos\theta=$ [エ]

となる。

したがって，△ABC の面積を S とおくと

$S=$ [オ]

と求められる。

（第４問は次ページに続く。）

(ii)　頂点Oから△ABCに垂線OHをひく。

点Hは3点A，B，Cを通る平面上にあるから，実数の定数x，yを用いて，

[カ] と表される。

また，「[キ]」を使って，x，yの値を求めると

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}$$

となる。

したがって，垂線OHの長さは

OH＝[ク]

である。

(i)，(ii)より，四面体OABCの体積Vは

V＝[ケ]

と求められる。

（第４問は次ページに続く。）

[カ] に当てはまる適当な式を，次の⓪～⑥のうちから**すべて選べ**。

⓪ $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

① $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

② $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

③ $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

④ $\overrightarrow{OH}=(1-x)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

⑤ $\overrightarrow{OH}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

⑥ $\overrightarrow{OH}=(1+x+y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

[キ] に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ 直線 OH は △ABC の重心を通る

① 直線 OH は △ABC の垂心を通る

② 直線 OH は △ABC の外接円の中心を通る

③ 直線 OH は △ABC の内接円の中心を通る

④ 直線 OH は辺 AB と垂直である

⑤ 直線 OH は辺 AC と垂直である

⑥ 直線 OH は辺 AB と辺 AC の両方に垂直である

⑦ 直線 OH は辺 OA，辺 OB，辺 OC のすべてに垂直である

（第４問は次ページに続く。）

(2)　等式 $4\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たす点 P がどのような位置にあるのかを調べる。

等式を変形して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{c}$$

となる。

四面体 OABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を $s:(1-s)$（s は実数の定数）に内分する点を E とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OE}}$（$k$ は実数の定数）であることが分かっている。

このとき，s，k の値は $\boxed{\text{タ}}$ であり，点 P の位置については $\boxed{\text{チ}}$ であることがいえる。

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の解答群のうちから一つずつ選べ。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪　$s=\dfrac{2}{5}$，$k=\dfrac{5}{9}$　　①　$s=\dfrac{3}{5}$，$k=\dfrac{5}{9}$

②　$s=\dfrac{3}{5}$，$k=\dfrac{4}{9}$　　③　$s=\dfrac{2}{5}$，$k=\dfrac{4}{9}$

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 2：3 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P

①　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：5 に内分する点を E，線分 OE を 5：9 に内分する点が P

②　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 4：5 に内分する点が P

③　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P

(第４問は次ページに続く。)

(3)　(2)で求めた点Pについて，次の問いに答えよ。

(i)　四面体PABCの体積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$，四面体POBDの体積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となる。

(ii)　点Pを通り，四面体OABCの辺OA，辺OB，辺OCとそれぞれA′，B′，C′で交わる平面がある。

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=p\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=r\vec{c}$，$(0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1)$ とおくと，

条件 A′B′＝B′C′＝C′A′ かつ PA′＝PB′＝PC′ を満たすのは $\boxed{\text{ヌ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{4}$

①　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{2}$

②　$p=\dfrac{2}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$，$r=\dfrac{2}{5}$

③　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

④　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑤　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑥　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑦　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$

⑧　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$

第１講　三角関数

1 (1) $\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}+\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$

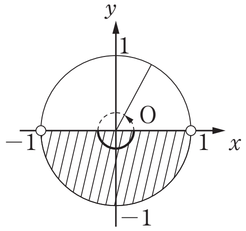
よって，$\sin\theta>\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ ……①は

$$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0$　より　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$ と変形できる。

$0\leqq\theta<2\pi$　より　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

したがって，$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$　より　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$



(2) 2 次方程式 $25x^2-35x+k=0$ の解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であることから，解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$ ……①，　$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}$ ……②

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$より，$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$

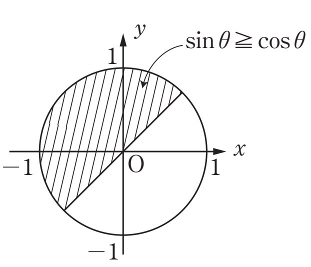
①，②を代入して，$\left(\frac{7}{5}\right)^2-2\cdot\frac{k}{25}=1$　　よって，$k=12$

したがって　$25x^2-35x+12=0$　　$(5x-4)(5x-3)=0$　　$x=\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$

$\sin\theta\geqq\cos\theta$　より　$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$

また，$\sin\theta\geqq\cos\theta$ および $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$　より

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$



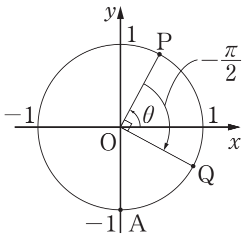
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{\sqrt{25}}{10}$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{50}}{10}$，

$\cos\theta=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{\sqrt{36}}{10}$　より　$\cos\frac{\pi}{3}<\cos\theta<\cos\frac{\pi}{4}$

したがって　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　(③)

2 (1)　P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$　また，
　　　　　①　　⓪



Q$\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ より　Q$(\sin\theta,\ -\cos\theta)$
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　⓪　　④

(2)　A$(0,\ -1)$，Q$(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ より，線分 AQ の長さ ℓ は

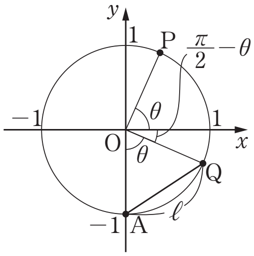
$$\ell=\sqrt{\sin^2\theta+(-\cos\theta+1)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1}$$

$$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}=\sqrt{2\cdot2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=2\sin\frac{\theta}{2}\quad(\because\ 0<\theta<\pi)$$

よって，関数 $\ell=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフは，$\ell=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍，ℓ 軸方向に 2 倍したグラフである。したがって，関数 ℓ のグラフとして最も適当なものは　(②)

(別解) $\angle$AOQ$=\theta$ より，$\triangle$OAQ において，線分 AQ の中点を M とすると

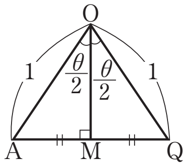


OA$=$OQ$=1$，$\angle$AOM$=\angle$QOM$=\dfrac{\theta}{2}$，

$\angle$OMA$=\angle$OMQ$=\dfrac{\pi}{2}$ より

AM$=$OA$\sin\angle$AOM$=1\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=\sin\dfrac{\theta}{2}$



したがって，$\ell=2$AM$=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

3 (1)　$y=\sin2x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したもの。

よって，④

$y=\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)$ は $y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{3}{2}\pi$ だけ平行移動したもの。よって，⑥

(2)　グラフが $-2\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるので，③，⑦は不適。

また，グラフの y 切片が -2 であることより，$x=0$ のとき $y=-2$ である。

$x=0$ のとき

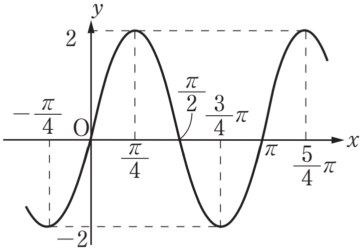
⓪：$y=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$　①：$y=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$　②：$y=2\sin\pi=0$

④：$y=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$　⑤：$y=2\cos(-\pi)=-2$　⑥：$y=2\cos\pi=-2$

より，正しい可能性があるものは①，⑤，⑥に限られる。

①：$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

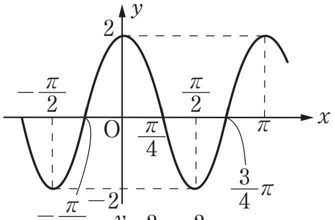
よって，$y=2\sin2x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。



$y=2\sin2x$

⑤：$y=2\cos2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ は，$y=2\cos2x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。

⑥：$y=2\cos2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ は，$y=2\cos2x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。



$y=2\cos2x$

したがって，正しいものは①，⑤，⑥である。

第２講　指数・対数関数

1 (1)　$t^{\frac{1}{3}}=X$ とおくと，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ より $X-\dfrac{1}{X}=-3$

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=X^2+\frac{1}{X^2}=\left(X-\frac{1}{X}\right)^2+2\cdot X\cdot\frac{1}{X}=(-3)^2+2=11$$

$$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=\left(X+\frac{1}{X}\right)^2=\left(X-\frac{1}{X}\right)^2+4\cdot X\cdot\frac{1}{X}=(-3)^2+4=13$$

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$ より $t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$

$$t-t^{-1}=X^3-\frac{1}{X^3}=\left(X-\frac{1}{X}\right)\left(X^2+1+\frac{1}{X^2}\right)=-3\cdot(11+1)=-36$$

(2)　$x>0$，$y>0$，$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$

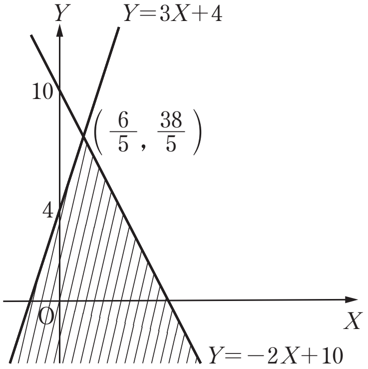
$\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5$ より $\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 y\leqq 5$　　よって　$X+\dfrac{1}{2}Y\leqq 5$

すなわち　$2X+Y\leqq 10$ ……③

$\log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1$ より $\dfrac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}\leqq 1$　$\log_3 y-3\log_3 x\leqq 4$

よって　$3X-Y\geqq -4$ ……④

③と④を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)



よって，Y のとり得る最大の整数の値は 7

また，$Y=7$ のとき

③より　$2X+7\leqq 10$　つまり　$X\leqq\dfrac{3}{2}$

④より　$3X-7\geqq -4$　つまり　$X\geqq 1$

よって　$1\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}$

すなわち　$1\leqq\log_3 x\leqq\dfrac{3}{2}$　　よって　$3\leqq x\leqq 3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}$

これを満たす最大の整数の値は　$x=5$

2 (1)　$\log_{10}2=0.3010$　より　$10^{0.3010}=2$　(①)，　$2^{\frac{1}{0.3010}}=10$　(⑤)

(2)(i)　3 の目盛りと 4 の目盛りの間隔は

$$\log_{10}4-\log_{10}3=\log_{10}\frac{4}{3}$$

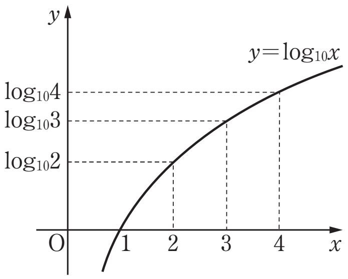
1 の目盛りと 2 の目盛りの間隔は

$\log_{10}2-\log_{10}1=\log_{10}2$

底10は1より大きいので

$\log_{10}\frac{4}{3}<\log_{10}2$

したがって，3の目盛りと4の目盛りの間隔は，1の目盛りと2の目盛りの間隔より小さい　(②)



(ii)　対数ものさしAの2の目盛りとaの目盛りの間隔と，
対数ものさしBのbの目盛りと1の目盛りの間隔が等しいので

$\log_{10}a-\log_{10}2=\log_{10}b$

$\log_{10}a=\log_{10}2+\log_{10}b$

$\log_{10}a=\log_{10}2b$

よって　$a=2b$

したがって，aとbの関係について，いつでも成り立つ式は　①

(iii)　対数ものさしAのdの目盛りと2の目盛りの間隔と，
ものさしCのcの目盛りと1の目盛りの間隔が等しいので

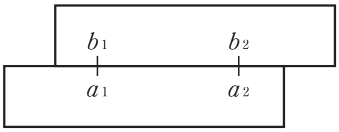
$c\log_{10}2-1\cdot\log_{10}2=\log_{10}d-\log_{10}2$

$\log_{10}2^c=\log_{10}d$

よって　$d=2^c$

したがって，cとdの関係について，いつでも成り立つ式は　②

(iv)　右図のように，対数ものさしAのa_1，a_2 $(a_1<a_2)$の目盛りと，対数ものさしBのb_1，b_2 $(b_1<b_2)$の目盛りがそれぞれ一致したとき



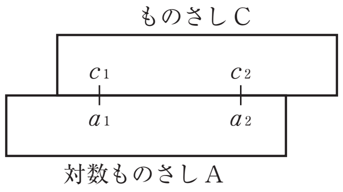
$\log_{10}a_2-\log_{10}a_1=\log_{10}b_2-\log_{10}b_1$

$\log_{10}\frac{a_2}{a_1}=\log_{10}\frac{b_2}{b_1}$

よって　$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$ ……①

したがって，$a_1=9$，$a_2=63$，$b_1=1$とすると，$b_2=7$となり，
63を9で割ること（③）により，割り切れて商が7であることがわかる。

①より $a_1b_2=a_2b_1$ ……②　　よって，$a_1=1$，$a_2=13$，$b_1=4$とすると，
$b_2=52$となり，13に4をかけること（②）により，積が52であることがわかる。



また右図のように，対数ものさしAの a_1，a_2 $(a_1<a_2)$ の目盛りと，ものさしCの c_1，c_2 $(c_1<c_2)$ の目盛りがそれぞれ一致したとき

$\log_{10}a_2-\log_{10}a_1=c_2\log_{10}2-c_1\log_{10}2$

$\log_{10}\dfrac{a_2}{a_1}=(c_2-c_1)\log_{10}2$

$\log_{10}\dfrac{a_2}{a_1}=\log_{10}2^{c_2-c_1}$

よって　$\dfrac{a_2}{a_1}=2^{c_2-c_1}$ ……③

したがって，$a_1=1$，$c_1=0$，$c_2=4$ とすると，$a_2=16$ となり，2を4乗すること（❹）により，その値が16であることがわかる。

③より $\log_2\dfrac{a_2}{a_1}=c_2-c_1$ ……④　　よって，$a_1=1$，$a_2=64$，$c_1=0$ とすると，$c_2=6$ となり，$\log_2 64$ の値を求めること（❺）により，その値が6であることがわかる。

また，⓪，❶は，①～④のいずれの式を用いても実行できない。

以上より，適切な箇所の目盛りを読み取るだけで実行できるものは，❷，❸，❹，❺

3 (i) $\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{17}{12}}$

よって，$\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}=a^2$ を満たす a の値は存在しない　(⓪)

(ii) $\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}=\dfrac{2^6a^6}{(2^2)^2a^2}=\dfrac{2^6a^6}{2^4a^2}=2^2a^4=4a^4$

$4a^4=\dfrac{a^3}{2}$ より　$8a^4-a^3=0$　　$a^3(8a-1)=0$　　$a>0$ より $a=\dfrac{1}{8}$

よって，$\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}=\dfrac{a^3}{2}$ を満たす a の値はちょうど一つである　(❶)

(iii) $4(\log_2 a-\log_4 a)=4\left(\log_2 a-\dfrac{\log_2 a}{\log_2 4}\right)=4\cdot\dfrac{\log_2 a}{2}=2\log_2 a$

$\log_{\sqrt{2}}a=\dfrac{\log_2 a}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2 a}{\frac{1}{2}}=2\log_2 a$

よって，$4(\log_2 a-\log_4 a)=\log_{\sqrt{2}}a$ はどのような a の値を代入しても成り立つ式である　(❸)

第３講 図形と方程式，式と証明

[1] (1)(i) 摂取するエネルギー量についての条件は

$200x+300y \leqq 1500$ (⓪) ……①

摂取する脂質の量についての条件は

$4x+2y \leqq 16$ (②) ……②

1袋あたり	A	B
量	100 g	100 g
エネルギー	200 kcal	300 kcal
脂 質	4 g	2 g

(ii) ①より $2x+3y \leqq 15$ ②より $2x+y \leqq 8$

$f(x,\ y)=2x+3y,\quad g(x,\ y)=2x+y$ とおく。

⓪：$f(0,\ 5)=15$ より，条件①を満たす。よって，正しくない。

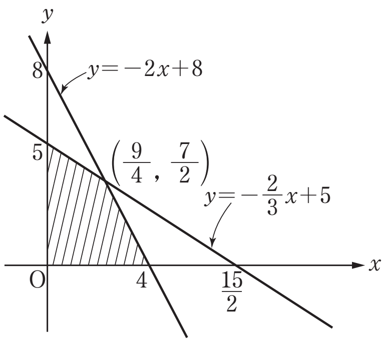
①：$f(5,\ 0)=10,\quad g(5,\ 0)=10$ より，条件①は満たすが，条件②は満たさない。よって，正しい。

②：$f(4,\ 1)=11$ より，条件①を満たす。よって，正しくない。

③：$f(3,\ 2)=12,\ g(3,\ 2)=8$ より，条件①，条件②をともに満たす。よって，正しい。

以上より，正しいものは ① と ③

(iii) ①より $y \leqq -\dfrac{2}{3}x+5$ ②より $y \leqq -2x+8$



よって，①，②，および $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)

食べる量の合計を $100x+100y=k$ とおき，

直線 $y=-x+\dfrac{k}{100}$ (傾き -1) が右図領域内の点を通るときに，y 切片 $\dfrac{k}{100}$ が最大となるときを考える。

食品 A，B が１袋を小分けにして食べられるような食品のとき，$x,\ y$ は実数。

よって，直線 $y=-x+\dfrac{k}{100}$ が点 $\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)$ を通るとき，y 切片 $\dfrac{k}{100}$ は最大となる。

このとき，$k=100\cdot\dfrac{9}{4}+100\cdot\dfrac{7}{2}=575$

したがって，食べる量の合計の最大値は 575 g $\left((x,\ y)=\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)\text{のとき}\right)$

食品 A，B が１袋を小分けにして食べられないような食品のとき，$x,\ y$ は整数。

このとき，$k=100(x+y)$ は 100 の倍数である。

したがって，食べる量の合計の最大値は，575g 以下で最大の 100 の倍数である 500g

$k=500$ のとき　$100(x+y)=500$　つまり　$x+y=5$

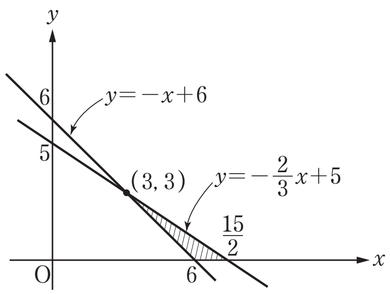
これを満たす領域内の整数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$ の 4 通りある。

(2)　花子さんが食品 A と B を合計 600g 以上食べて，エネルギーを 1500kcal 以下にするとき，

$100x+100y \geqq 600$　かつ　$200x+300y \leqq 1500$

すなわち　$x+y \geqq 6$ ……③　かつ　$2x+3y \leqq 15$ ……④

③，④，および $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)



このとき，脂質の量の合計を $4x+2y=l$ とおき，直線 $y=-2x+\frac{l}{2}$ (傾き -2) が右図領域内の点を通るときに，y 切片 $\frac{l}{2}$ が最小になるときを考える。

食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられない食品のとき，x，y は整数。

よって，直線 $y=-2x+\frac{l}{2}$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき，y 切片 $\frac{l}{2}$ は最小となる。

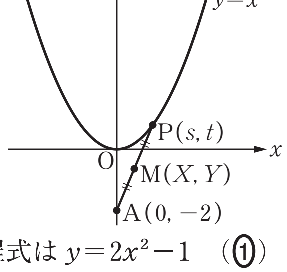
このとき，$l=4\cdot3+2\cdot3=18$

したがって，A を 3 袋，B を 3 袋食べるときに脂質が最も少なくでき，そのときの脂質は 18g である。

2　(1)　$\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とおく。

点 P は放物線 $y=x^2$ 上の点より，$t=s^2$ ……①

(i)　$\mathrm{A}(0,\ -2)$ のとき

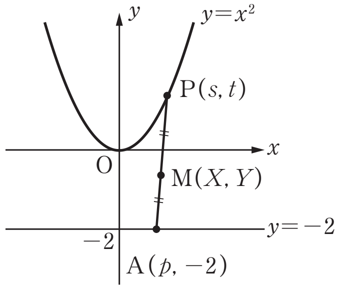


$$\begin{cases} X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t-2}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X \\ t=2Y+2 \end{cases}$$

これを①に代入して　$2Y+2=(2X)^2$

よって $Y=2X^2-1$　したがって，点 M の軌跡の方程式は $y=2x^2-1$　(①)

(ii) A$(p, -2)$ のとき



$$\begin{cases} X=\dfrac{s+p}{2} \\ Y=\dfrac{t-2}{2} \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} s=2X-p \\ t=2Y+2 \end{cases}$$

これを①に代入して

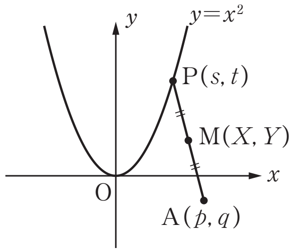
$$2Y+2=(2X-p)^2$$

$$2Y+2=\left\{2\left(X-\frac{p}{2}\right)\right\}^2$$

$$2Y+2=2^2\left(X-\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{よって} \ Y=2\left(X-\frac{p}{2}\right)^2-1$$

したがって，点 M の軌跡は(i)の軌跡を x 軸方向に $\frac{1}{2}p$（⓪）だけ平行移動したものである。

(iii) A(p, q) のとき



$$\begin{cases} X=\dfrac{s+p}{2} \\ Y=\dfrac{t+q}{2} \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} s=2X-p \\ t=2Y-q \end{cases}$$

これを①に代入して

$$2Y-q=(2X-p)^2 \quad \text{よって} \ Y=2X^2-2pX+\frac{p^2}{2}+\frac{q}{2}$$

したがって，点 M の軌跡の方程式は $y=2x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}$

これと放物線 $y=x^2$ の共有点の x 座標は，$x^2=2x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}$ より，

x の 2 次方程式 $x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}=0$ の実数解であり，この実数解の個数が共有点の個数である。

この方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=p^2-1\cdot\left(\frac{p^2}{2}+\frac{q}{2}\right)=\frac{p^2}{2}-\frac{q}{2}=\frac{p^2-q}{2}$$

$q=0$ のとき，$\dfrac{D}{4}=\dfrac{p^2}{2}\geqq 0$（等号成立は $p=0$ のとき）

したがって，⓪，②は正しくなく，①は正しい。

③：$q<p^2$ のとき，$D>0$　　よって，正しくない。

④：$q=p^2$ のとき，$D=0$　　よって，正しい。

⑤：$q>p^2$ のとき，$D<0$　　よって，正しい。

以上より，正しいものは ①，④，⑤

(2)　線分 OQ の中点の軌跡は，

図より O(0,　0) 中心，

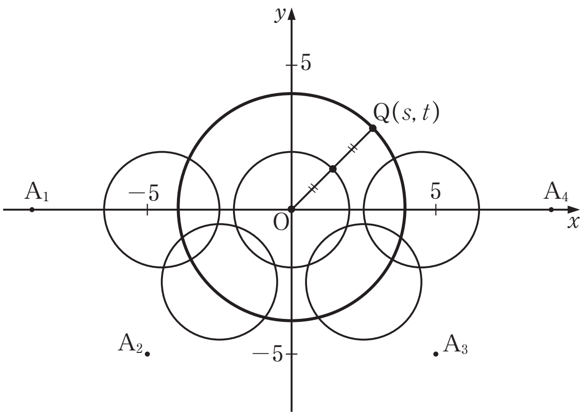
半径 2 の円であり，円 C は

O(0,　0) 中心，半径 4 の円，

すなわち円 C の方程式は

$x^2+y^2=16$ であることが予想

される。



この円周上の点を Q(s,　t) と

おくと

$$s^2+t^2=16 \quad \cdots\cdots ②$$

OQ の中点の座標を $M_O(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X \\ t=2Y \end{cases}$$

これを②に代入して $(2X)^2+(2Y)^2=16$　$4X^2+4Y^2=16$　よって $X^2+Y^2=4$

したがって，線分 OQ の中点の軌跡の方程式は $x^2+y^2=4$ であり，図の円の 1 つに一致する。

A_1Q の中点の座標を $M_{A_1}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s-9}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X+9 \\ t=2Y \end{cases}$$

これを②に代入して

$$(2X+9)^2+(2Y)^2=16$$

$$\left\{2\left(X+\frac{9}{2}\right)\right\}^2+4Y^2=16 \qquad 4\left(X+\frac{9}{2}\right)^2+4Y^2=16$$

$$よって \left(X+\frac{9}{2}\right)^2+Y^2=4$$

したがって，線分 A_1Q の中点の軌跡の方程式は $\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+y^2=4$ であり，図の円の 1 つに一致する。

A_2Q の中点の座標を $M_{A_2}(X,\ Y)$とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s-5}{2} \\ Y=\dfrac{t-5}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X+5 \\ t=2Y+5 \end{cases}$$

これを②に代入して

$$(2X+5)^2+(2Y+5)^2=16$$

$$4\left(X+\frac{5}{2}\right)^2+4\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=16$$

よって $\left(X+\frac{5}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=4$

したがって，線分 A_2Q の中点の軌跡の方程式は $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

A_3Q の中点の座標を $M_{A_3}(X,\ Y)$ とおくと，

$\begin{cases} X=\dfrac{s+5}{2} \\ Y=\dfrac{t-5}{2} \end{cases}$ より $\begin{cases} s=2X-5 \\ t=2Y+5 \end{cases}$ これを②に代入して整理すると，

$$\left(X-\frac{5}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=4$$

したがって，線分 A_3Q の中点の軌跡の方程式は $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

A_4Q の中点の座標を $M_{A_4}(X,\ Y)$ とおくと，

$\begin{cases} X=\dfrac{s+9}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases}$ より $\begin{cases} s=2X-9 \\ t=2Y \end{cases}$ これを②に代入して整理すると，

$$\left(X-\frac{9}{2}\right)^2+Y^2=4$$

したがって，線分 A_4Q の中点の軌跡の方程式は $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

以上より，円 C の方程式は $x^2+y^2=16$ （❸）

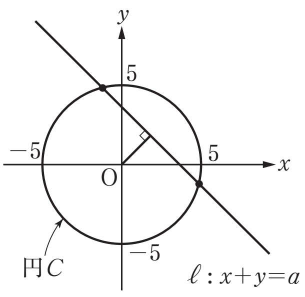
3 〔１〕 $C: x^2+y^2=25$ と $\ell: x+y=a$ が異なる２点で交わるための条件は，

（C の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $\ell: x+y-a=0$ の距離）

＜ （C の半径５）

よって，$\dfrac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}<5$ $|a|<5\sqrt{2}$

したがって，$-5\sqrt{2}<a<5\sqrt{2}$ ……①



（別解） $C: x^2+y^2=25$ と $\ell: y=-x+a$ の共有点の x 座標は

2 次方程式 $x^2+(-x+a)^2=25$ の実数解である。

整理して $2x^2-2ax+a^2-25=0$

これが異なる 2 つの実数解をもつのは，判別式を D とすると $D>0$ のとき

$$\frac{D}{4}=a^2-2\cdot(a^2-25)=-a^2+50>0$$

$a^2<50$　　したがって，$-5\sqrt{2}<a<5\sqrt{2}$

①の条件を満たすとき，C と ℓ の交点の一つを $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，$\mathrm{P}(s,\ t)$ は円 C，直線 ℓ 上の点より

$$\begin{cases} s^2+t^2=25 & \cdots\cdots② \\ s+t=a & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より　$(s+t)^2-2st=25$　　これに③を代入して　$a^2-2st=25$

したがって　$st=\dfrac{a^2-25}{2}$

〔２〕

(1)　【解答A】において

$x+\dfrac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{y}}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ……① の等号が成立するのは $x=\dfrac{1}{y}$ つまり $xy=1$ のとき

$y+\dfrac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{4}{x}}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ ……② の等号が成立するのは $y=\dfrac{4}{x}$ つまり $xy=4$ のとき

よって，①：$x+\dfrac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{y}}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ ②：$y+\dfrac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{4}{x}}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす x，y の値がない（❷）ため，①と②の等号が同時に成立することはない。

したがって，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot 4\sqrt{\dfrac{y}{x}}=8$ の等号が成立せず，

$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の値が 8 となることはない。ゆえに，最小値が 8 である，というのは誤りである。

(2)　【解答B】において，$xy+\dfrac{4}{xy}\geqq 2\sqrt{xy\cdot\dfrac{4}{xy}}=4$，すなわち

$xy+\dfrac{4}{xy}+5\geqq 2\sqrt{xy\cdot\dfrac{4}{xy}}+5=9$ の等号が成立するのは $xy=\dfrac{4}{xy}$ すなわち $(xy)^2=4$ のときであり，$xy>0$ より，$xy=2$ のときである（例：$x=2$，$y=1$）。

したがって，$xy+\dfrac{4}{xy}+5$，すなわち $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値は 9 である。

第４講 微分・積分

1 (1) $C: y=x^2+2x+1$ より $y'=2x+2$

よって，点 $(t,\ t^2+2t+1)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$ すなわち $y=(2t+2)x-t^2+1$ ……①

$D: f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ より $f'(x)=2x-(4a-2)$

よって，点 $(s,\ f(s))$ における D の接線 ℓ の方程式は

$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

すなわち $y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1$ ……②

①と②は同じ直線を表しているので

$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}$ つまり $\begin{cases} s-t=2a & \cdots\cdots③ \\ s^2-t^2=4a^2 & \cdots\cdots④ \end{cases}$

④より $(s+t)(s-t)=4a^2$ これに③を代入して

$2a(s+t)=4a^2$ $a>0$ より $s+t=2a$ ……⑤

③と⑤より $t=0,\ s=2a$

このとき①より，ℓ の方程式は $y=2x+1$

(2) $C: y=x^2+2x+1$ と $D: y=f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ を連立させて

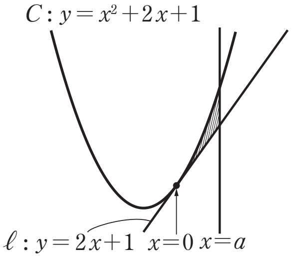
$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

$4ax=4a^2$

$a>0$ より $x=a$

よって，放物線 C と D の交点の x 座標は a

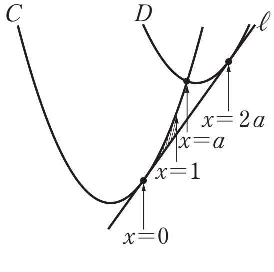
C と ℓ，および $x=a$ で囲まれた図形の面積を S とすると，



$S=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\int_0^a x^2dx$

$=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a=\dfrac{a^3}{3}$

(3) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$2a \geqq 1$



このとき C と D，および ℓ で囲まれた図形の中で，$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T は

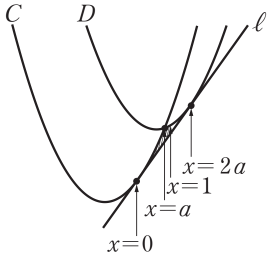
$a>1$ のとき

$T=\int_0^1 x^2dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$T = \int_0^a \{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx$$
$$+\int_a^1 \{(x^2-(4a-2)x+4a^2+1)-(2x+1)\}dx$$
$$= S + \int_a^1 (x^2-4ax+4a^2)\,dx$$
$$= S + \int_a^1 (x-2a)^2 dx$$
$$= S + \left[\frac{(x-2a)^3}{3}\right]_a^1$$
$$= \frac{a^3}{3} + \frac{(1-2a)^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3}$$
$$= \frac{a^3}{3} + \frac{1-6a+12a^2-8a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = -2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき



(4)　$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

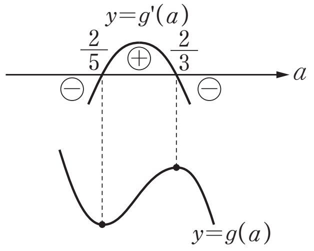
$$U = 2T - 3S = -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$$

これを $g(a)$ とおくと

$g'(a) = -15a^2 + 16a - 4 = -(5a-2)(3a-2)$

よって，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ における $g(a)$ の増減表は下図

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗		↘	



したがって，U は $a = \frac{2}{3}$ で最大値

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = -5\cdot\frac{8}{27} + 8\cdot\frac{4}{9} - 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{27}(-40+96-72+18) = \frac{2}{27}$$

をとる。

2　(1)　3 次関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は 2 次関数である。

また，$f(x)$ が $x=-1$，3 で極値をとるので，$f'(-1)=0$ かつ $f'(3)=0$

よって，$f'(x)$ は $x+1$，$x-3$ を因数にもつので，$(x+1)(x-3)$ で割り切れる。

(2)　$f'(x) = a(x+1)(x-3) = a(x^2-2x-3)$ とおくと，

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x^2-2x-3)\,dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+C$　（C は積分定数）

$y=f(x)$ が点 $(0,\ 2)$ を通るので，$f(0)=2$　　よって　$C=2$

よって，$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+2$

また，$f(x)$ は $x=-1$ で極小値 $-\frac{4}{3}$ をとるので，$f(-1)=-\frac{4}{3}$ より

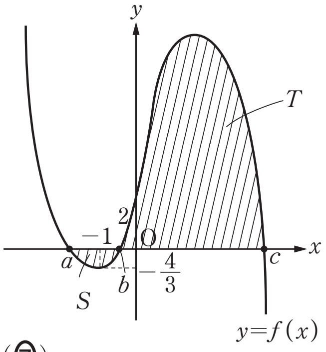
$a\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)\right\}+2=-\frac{4}{3}$　　　$\frac{5}{3}a+2=-\frac{4}{3}$

よって　$a=-2$

したがって，$f(x)=-2\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)+2=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+2$

(3)　$f(-1)=-\frac{4}{3}<0$，$f(0)=2>0$ より，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは x 軸と $x<-1$，$-1<x<0$，$0<x$ において共有点をもつ。

したがって，方程式 $f(x)=0$ は 3 つの実数解をもち，そのうち負の解は 2 個である。



右図より

$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=-S+T$　（⑦）

3　(1)　$S(x)$ は 3 次関数で，$y=S(x)$ のグラフは x 軸と $x=-1$ で交点を持ち，$x=2$ で接することから，

$S(x)=k(x+1)(x-2)^2$　$(k\neq 0)$

とおくことができる。また，$y=S(x)$ のグラフは点 $(0,\ 4)$ を通るので，$S(0)=4$

したがって，$4k=4$ より　$k=1$

ゆえに，$S(x)=(x+1)(x-2)^2$

また，$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ において，$S(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ であるから，

$(a+1)(a-2)^2=0$

$a<0$ のとき，$a=-1$

グラフより，関数 $y=S(x)$ は $x=0$ を境に増加から減少に移り，$x=2$ を境に減少から増加に移っている。

また，$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_a^x=F(x)-F(a)$ より

$S'(x)=f(x)$

$S(x)$ の増減，および $S'(x)$ すなわち $f(x)$ の正負は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)=$ $S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	4	↘	0	↗

したがって，関数 $f(x)$ について

$x=0$ のとき $f(x)$ の値は 0　(⓪)

$x=2$ のとき $f(x)$ の値は 0　(⓪)

$0<x<2$ の範囲では $f(x)$ の値は負（②）である。

また，$y=f(x)$ のグラフの概形として最も適当なものは ①

(2)　$a=0$ のとき $S(0)=0$

⓪～④における $y=S(x)$ のグラフはいずれも $S(0)=0$ を満たす。

⓪～④のそれぞれのグラフで，$y=f(x)=S'(x)$ のグラフの正負と，$y=S(x)$ のグラフの増減が矛盾するものを二つ選ぶ。

①：$y=f(x)$ のグラフにおいて $f(x)=0$ となる x を α とすると，$\alpha<0$ であり，$x=\alpha$ を境に正から負に転じているが，$y=S(x)$ のグラフの $x<0$ の部分で増加から減少に移る点はない。よって矛盾。

④：$y=f(x)$ のグラフにおいて $f(x)=0$ となる x を α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とすると $\alpha<0<\beta<\gamma$ であり，$x=\alpha$ を境に正から負に転じているが，$y=S(x)$ のグラフの $x<0$ の部分で増加から減少に移る点はない。よって矛盾。

以上より，$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ の関係と矛盾するものは ①と④

第5講　数列

1　$a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$ ……①

(1)　$a_2=\dfrac{4}{2}(3a_1+3^2-2\cdot3)=\dfrac{4}{2}(3\cdot0+9-6)=6$

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$

$a_1=0$ より $b_1=0$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{3a_n}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

よって，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

したがって，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$n\geqq2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{(n+1)-3}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$n=1$ のとき

$\dfrac{1-2}{3\cdot2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=0=b_1$ より，この式は $n=1$ のときも成立する。

(3)　(2)より $\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n-2}{3(n+1)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

よって，$a_n=3^{n-1}(n+2)(n-2)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$n+1$，$n+2$ は隣接 2 整数より，いずれか一方が 2 の倍数。

したがって，すべての自然数 n について，a_n は整数となる。

(4) すべての自然数 n で，$3^{n-1}(n^2-4)$ は 3 で割り切れる。

よって，a_n を 3 で割った余りは，$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ （$=c_n$ とする）を 3 で割った余りである。

$c_{3k}=\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \frac{4\cdot5}{2}=10 \text{ より}\right)$

c_{3k}，すなわち a_{3k} を 3 で割った余りは 1

$c_{3k+1}=\frac{(3k+2)(3k+3)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \frac{5\cdot6}{2}=15 \text{ より}\right)$

c_{3k+1}，すなわち a_{3k+1} を 3 で割った余りは 0

$c_{3k+2}=\frac{(3k+3)(3k+4)}{2}$ $\left(k=1 \text{ のとき } \frac{6\cdot7}{2}=21 \text{ より}\right)$

c_{3k+2}，すなわち a_{3k+2} を 3 で割った余りは 0

$a_1=0$，$a_2=6$ を 3 で割った余りはそれぞれ 0，0 である。

2020 を 3 で割った商は 673，余りは 1 より，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは

$$\sum_{k=1}^{673}(0+0+1)+0=673$$

を 3 で割った余りであり，それは 1 である。

2 (1) $a_1=6$，$a_{n+1}=3a_n-8$ ……①

$a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ ……②

(i) ②より $a_{n+1}=3a_n-2k$

これと①を比較して $-2k=-8$　よって $k=4$

(ii) ②より $a_{n+1}-4=3(a_n-4)$

数列 $\{a_n-4\}$ は，初項 $a_1-4=2$，公比 3 の等比数列

よって $a_n-4=2\cdot3^{n-1}$　　したがって　$a_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(2) $b_1=4$，$b_{n+1}=3b_n-8n+6$ ……③　　$b_2=10$，$b_3=20$，$b_4=42$

$p_n=b_{n+1}-b_n$ とする。

（i）$p_1=b_2-b_1=10-4=6$

（ii）$b_{n+2}=3b_{n+1}-8(n+1)+6$

よって，$p_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)-8$

したがって　$p_{n+1}=3p_n-8$

$$\begin{array}{rrcrrr} & b_{n+2} & = & 3b_{n+1} & -\ 8(n+1) & +6 \\ -) & b_{n+1} & = & 3b_n & -\ 8n & +6 \\ \hline & b_{n+2}-b_{n+1} & = & 3(b_{n+1}-b_n) & -8 & \end{array}$$

（iii）(1)の問題Aの漸化式と同じ形であるから $p_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(3)（i）③を $b_{n+1}+s(n+1)+t=3(b_n+sn+t)$ ……④　と変形し，

③　⓪

$q_n=b_n+sn+t$ とおくと，

$q_{n+1}=3q_n$となり，数列$\{q_n\}$が公比3の等比数列とわかる。

（ii）④より $b_{n+1}=3b_n+2sn+2t-s$

これと③を比較して　$2s=-8$ かつ $-s+2t=6$

したがって　$s=-4$，$t=1$

(4)　(3)より　$b_{n+1}-4(n+1)+1=3(b_n-4n+1)$

よって，数列 $\{b_n-4n+1\}$ は，初項 $b_1-4\cdot1+1=1$，公比3の等比数列である。

したがって，$b_n-4n+1=1\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=3^{n-1}+4n-1$

（別解）(2)より　数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{p_n\}$ の一般項が $p_n=2\cdot3^{n-1}+4$

$n\geqq2$ のとき $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}p_k=4+\dfrac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}+4(n-1)=3^{n-1}+4n-1$

$n=1$ のとき $3^0+4\cdot1-1=4=b_1$ より，この式は $n=1$ のときも成立する。

(5)　$c_1=16$，$c_{n+1}=3c_n-4n^2-4n-10$ ……⑤

$c_{n+1}+s(n+1)^2+t(n+1)+u=3(c_n+sn^2+tn+u)$ ……⑥　と変形できるとする。

⑥より $c_{n+1}=3c_n+2sn^2+(2t-2s)n+2u-t-s$

これと⑤を比較して $2s=-4$，$2t-2s=-4$，$2u-t-s=-10$

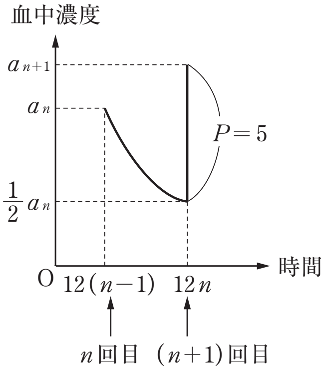
したがって $s=-2$，$t=-4$，$u=-8$

このとき⑥より，$c_{n+1}-2(n+1)^2-4(n+1)-8=3(c_n-2n^2-4n-8)$

よって，数列 $\{c_n-2n^2-4n-8\}$ は，初項 $c_1-2\cdot1^2-4\cdot1-8=2$，公比3の等比数列である。

したがって，$c_n-2n^2-4n-8=2\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$c_n=2\cdot3^{n-1}+2n^2+4n+8$

3 (1) $a_1=P=5$



$T=12$ より，服用から 12 時間経過すると血中濃度は $\frac{1}{2}$ 倍になる。

よって，第 $(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は $\frac{1}{2}a_n$

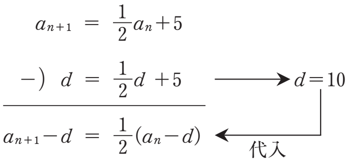
薬を服用すると血中濃度はそこから P すなわち 5 だけ上昇する。

したがって，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5$

$a_1=5$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5$ ……①

【考え方 1】

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5$ は $a_{n+1}-10=\frac{1}{2}(a_n-10)$ と変形できる。



よって，数列 $\{a_n-10\}$ は初項 $a_1-10=-5$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって　$a_n-10=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　より　$a_n=10-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【考え方 2】

$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+5$ ……②，　$a_2=\frac{1}{2}a_1+5=\frac{15}{2}$

②－①より　$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は，初項 $a_2-a_1=\frac{5}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，$a_{n+1}-a_n=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……③

①－③より　$a_n=\frac{1}{2}a_n+5-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$a_n=10-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) n 回目の服用直前の血中濃度 a_n-P，服用直後の血中濃度が a_n であることに注目する。

$5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$ より，$a_n=10-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<10<40$

よって，どれだけ服用しても，血中濃度が 40 すなわち L を超えることはない。

したがって，⓪，①は正しくなく，②は正しい。

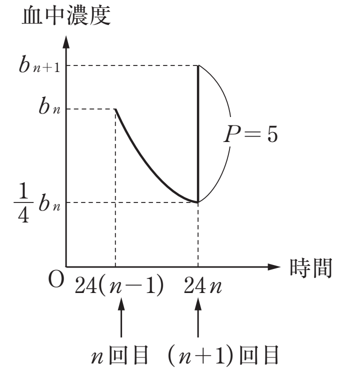
また，$n \geqq 2$ のとき，$5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \leqq \dfrac{5}{2}$　（等号成立は $n=2$ のとき）

よって，$a_n-P=5-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \geqq 5-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}>2$ より，1 回目の服用直後に血中濃度が P に達して以降，血中濃度が 2 すなわち M を下回ることはない。

したがって，③は正しく，④，⑤は正しくない。

以上より，正しいものは ② と ③

(3)　$(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は $\dfrac{1}{4}b_n$，服用直後の血中濃度は $\dfrac{1}{4}b_n+5$ より，



$$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+5 \quad \cdots\cdots ④, \qquad b_1=P=5$$

④は $b_{n+1}-\dfrac{20}{3}=\dfrac{1}{4}\left(b_n-\dfrac{20}{3}\right)$ と変形できる。

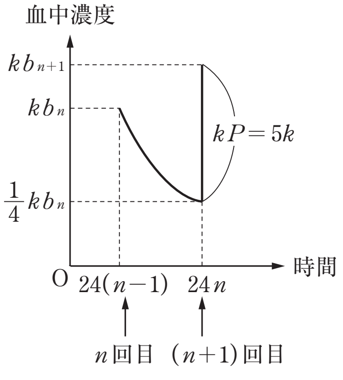
よって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{20}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{20}{3}=-\dfrac{5}{3}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列より

$$b_n-\frac{20}{3}=-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \qquad b_n=\frac{20}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

したがって

$$\frac{b_{n+1}-P}{a_{2n+1}-P}=\frac{\left\{\dfrac{20}{3}-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}-5}{\left\{10-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\}-5}=\frac{\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{5-5\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}=\frac{\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

(4)　薬 D を 24 時間ごとに k 錠ずつ服用する場合，最初の服用直後の血中濃度が kP となることから，服用直後の血中濃度は kP だけ増加すると判断できる。



1 回目の服用直後の血中濃度は $kP=kb_1$ であり，

服用量を変化させても T の値は変わらないことから，

2 回目の服用直前の血中濃度は $\dfrac{1}{4}kb_1$，服用直後の血中濃度は $\dfrac{1}{4}kb_1+kP=k\left(\dfrac{1}{4}b_1+P\right)=kb_2$ となる。

同様に繰り返すと，n 回目の服用直後の血中濃度は kb_n となる。

したがって，薬 D を 24 時間ごとに k 錠ずつ服用した場合，最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用，すなわち $(n+1)$ 回目の服用直前の血中濃度は

$kb_{n+1}-kP=k(b_{n+1}-P)$

これと，薬 D を 12 時間ごとに 1 錠ずつ服用した場合の，最初の服用から $24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度 $a_{2n+1}-P$ が等しくなるのは

$k(b_{n+1}-P)=a_{2n+1}-P$　　すなわち $k=\dfrac{a_{2n+1}-P}{b_{n+1}-P}=3$ のときである

また，24 時間ごとに k 錠ずつ服用する場合の各服用直前の血中濃度を，12 時間ごとに 1 錠ずつ服用する場合の血中濃度以上とするためには

$k(b_{n+1}-P)\geqq a_{2n+1}-P$　　すなわち $k\geqq 3$ でなくてはならない。

また，$k=3$ のとき，n 回目の服用直後の血中濃度は

$$3b_n=20-5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

であり，$5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}>0$ より，$3b_n=20-5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<20<40$ であることから，どれだけ継続して服用しても，血中濃度が 40 すなわち L を超えることはない。

したがって，正しいものは ③

第６講　ベクトル

1 (1) $\overrightarrow{OA}=(3,\ 3,\ -6)=3(1,\ 1,\ -2)$ より $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=3\sqrt{6}$

$\overrightarrow{OB}=(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)=2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$ より

$|\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2}=2\sqrt{2(1+3)+4}=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+(-6)\cdot(-4)=12+24=36$

(2) $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=0$

$s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$54s+36t=0$　　よって $3s+2t=0$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ より $\overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=24$

$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2=24$

$36s+48t=24$　　よって $3s+4t=2$

したがって　$s=-\dfrac{2}{3},\ t=1$

このとき $\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\dfrac{2}{3}(3,\ 3,\ -6)+(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$

$=(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0)=2\sqrt{3}(1,\ -1,\ 0)$

したがって　$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=2\sqrt{6}$

(参考)　$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ より

$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=\dfrac{4}{9}\cdot 54-\dfrac{4}{3}\cdot 36+48=24$

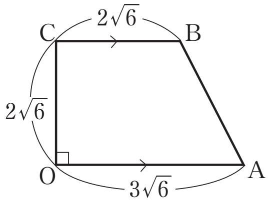
したがって　$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{6}$

(3) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)-(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0)$

$=(2,\ 2,\ -4)$

よって，$\overrightarrow{CB}=\dfrac{2}{3}(3,\ 3,\ -6)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ より，四角形 OABC は

平行四辺形ではないが，台形である（③）



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{CB}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{6}$ より

四角形OABCの面積は $(2\sqrt{6}+3\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}=30$

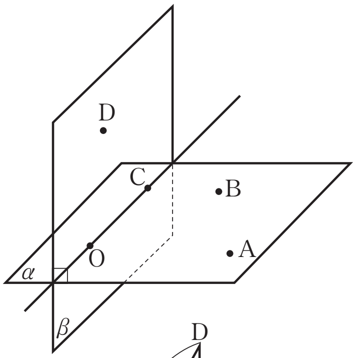
(4)　D$(x,\ y,\ 1)$ とおく。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0$　　$3x+3y-6=0$　　よって $x+y=2$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$ より $2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=2\sqrt{6}$　　よって $x-y=\sqrt{2}$

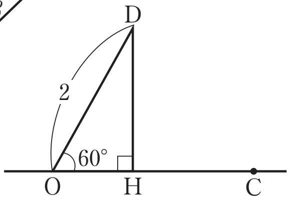
したがって $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より D$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

$\cos\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$　　よって $\angle\mathrm{COD}=60^\circ$



平面 $\alpha\perp$ 平面 β，すなわち平面OAC$\perp$ 平面OCDであり，この2つの平面の交線は直線OCである。

よって，点Dから直線OCに垂線DHを下ろすと，DH$\perp$ 平面OACであり，DHは，△ABCを底面とする四面体DABCの高さである。



よって，求める高さは

$\mathrm{DH}=\mathrm{OD}\sin 60^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

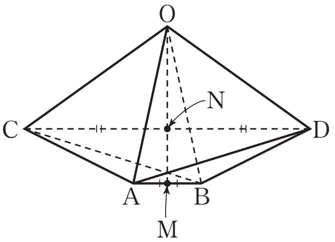
△ABCにおいて，底辺をBCとすると高さはOCである。

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=12$

したがって，四面体DABCの体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\dfrac{1}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

2　(1)(i)　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$



$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$

また，△OABは1辺の長さが1の正三角形であることから，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

同様に考えて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{OA}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\vec{a}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\vec{c}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=0$ ……①

また，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ より

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=k\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{c}=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}-\vec{c}$

よって

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}=\vec{a}\cdot\left(\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{k}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\dfrac{k}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=\dfrac{k}{2}\cdot1^2+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}k-\dfrac{1}{2}$ ……②

①，②より $\dfrac{3}{4}k-\dfrac{1}{2}=0$　　よって $k=\dfrac{2}{3}$

(iii)(iv)

【方針1】

(ii)より $\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

また $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$ より $\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

よって，$\vec{d}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{c}\cdot\vec{d}=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta=1\cdot1\cdot\cos\theta=\cos\theta$

よって $\cos\theta=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{c}\right|^2$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{3}$

【方針2】

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos0^\circ=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|$

(ii)より $\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ であるから $\overrightarrow{OM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{ON}$　よって $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|$

したがって，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\right|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left|\vec{c}+\vec{d}\right|^2=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}+\left|\vec{d}\right|^2\right)$

$=\dfrac{1}{4}(1^2+2\cos\theta+1^2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta$ ……③

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ……④

よって $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ より $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

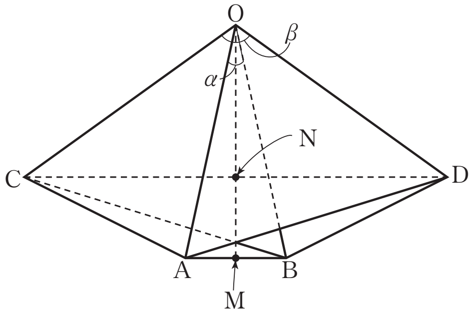
(2) △OAC, △OBC, △OAD, △OBD は, 1 辺の長さが 1 の正三角形であることから,

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$,

$\vec{c}\cdot\vec{d}=1\cdot1\cdot\cos\beta=\cos\beta$

線分 AB の中点を M，線分 CD の中点を N とすると，O，M，N は一直線上にある。



(i) (1)の【方針 2】の③と同様の計算により

$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

$\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\beta$

④より $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|$ より，$\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\right)^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2\left|\overrightarrow{ON}\right|^2$

よって $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)\cdot\dfrac{1}{2}(1+\cos\beta)$ より $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=1$ (①)

(ii) $\alpha=\beta$ のとき $(1+\cos\alpha)^2=1$ $1+\cos\alpha=\pm1$

$\cos\alpha=-2,\ 0$ $-1\leqq\cos\alpha\leqq1$ より $\cos\alpha=0$ よって $\alpha=90^\circ$

このとき，$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{ON}\right|$ より，点 M と点 N は一致する。

よって，線分 AB と線分 CD の中点が一致するので，四角形 ABDC は平行四辺形となり，点 D は平面 ABC 上にある (①)

3 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(1,\ 0,\ 1)$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(0,\ 1,\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1+0+0=1$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)-(1,\ 0,\ 1)=(-1,\ 1,\ 0)$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=-1+1+0=0$ より $OA\perp BC$

(2) $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ より

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\iff \overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$\iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

したがって，四面体 OABC について $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ となるための必要十分条件は

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$　(①)

(3)　(2)より $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ が常に成り立つための条件は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

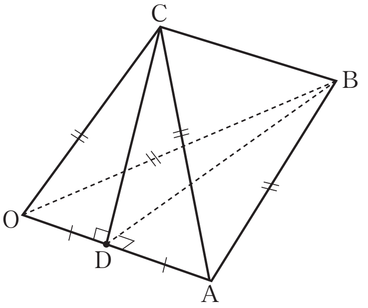
すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\neq 0$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}$

これが成り立つような四面体を選択肢⓪～⑤の中で選ぶと

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}$ であるような四面体 OABC　(②)

(4)(i)　線分 OA の中点を D とすると



$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}})$,　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ により

⓪　③

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BO}})$

$=\frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2\right\}$ である。

また，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$　　よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ である。

(ii)　同様に，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CO}})$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ により

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|^2\right\}$

$\mathrm{AC}=\mathrm{OC}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$　(①)　　よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ である。

このことから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0-0=0$ により $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$

である。

(5)　(4)の証明においては，$\mathrm{OC}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ のすべての等号が成り立つことを条件として用いているわけではなく，用いているのは $\mathrm{AB}=\mathrm{OB}$ かつ $\mathrm{AC}=\mathrm{OC}$ のみ用いている。したがって，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ が成り立つ四面体は $\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$ かつ $\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$ かつ $\mathrm{OB}\neq\mathrm{OC}$ であるような四面体 OABC　(⓪)

第７講　実践演習問題 第１問・第２問

第１問

〔１〕

(1)

$$\begin{array}{r} x\ -3 \\ x-1\,\overline{)\,x^2-4x+7} \\ \underline{x^2-\ \ x\quad} \\ -3x+7 \\ \underline{-3x+3} \\ 4 \end{array}$$

商　$x-3$　余り　4

(2)　(1)より　$x^2-4x+7=(x-1)(x-3)+4$

よって，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{x^2-4x+7}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)+4}=\dfrac{1}{x-3+\dfrac{4}{x-1}}$

ここで，$x-3+\dfrac{4}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}-2$

$x-1>0$，$\dfrac{4}{x-1}>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係（⓪）から

$$x-1+\frac{4}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=4$$

よって，$x-3+\dfrac{4}{x-1}\geqq 2$ $\left(\text{等号成立は } x-1=\dfrac{4}{x-1} \text{ すなわち } x-1=2 \text{ より}\right.$

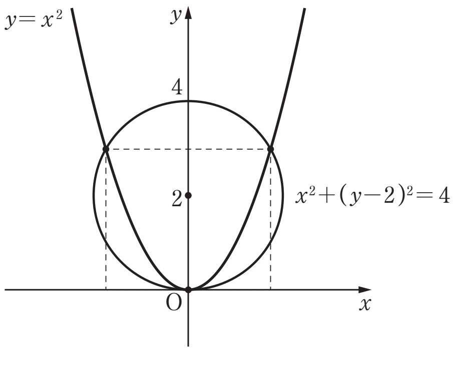
$\left. x=3 \text{ のとき}\right)$

したがって　$\dfrac{1}{x-3+\dfrac{4}{x-1}}\leqq\dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに θ は $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，つまり $x=3$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{3}$ をとる。

〔２〕



(1)　$a=2$ のとき，放物線 $L：y=x^2$ と円 $C：x^2+(y-2)^2=4$ の共有点の個数は，$y=x^2$ を $x^2+(y-2)^2=4$ に代入してできる２次方程式 $y+(y-2)^2=4$ すなわち $y^2-3y=0$ の解 $y=0$，3 によって定

まる。

$x^2 \geqq 0$ より $x^2 = y \geqq 0$ であり，

　　$y=0$ のとき x は 1 個 $(x=0)$

　　$y>0$ である y に対して，x は 2 個

定まる。2 次方程式 $y+(y-2)^2=4$ の解が 0 と正の数が 1 つ（②）であることから，放物線 L と円 C の共有点の個数は 3 個である。

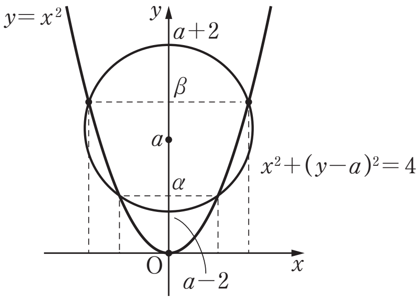
(2)　放物線 $L: y=x^2$ と

円 $C: x^2+(y-a)^2=4$ の共有点の個数は，

$y=x^2$ を $x^2+(y-a)^2=4$ に代入してできる 2 次方程式 $y+(y-a)^2=4$

すなわち $y^2-(2a-1)y+a^2-4=0$ ……①

の解 $y=\alpha,\ \beta$ によって定まり，



　　$y=0$ のとき x は 1 個 $(x=0)$

　　$y>0$ である y に対して，x は 2 個

定まる。

よって，放物線 L と円 C の共有点の個数が 4 個になるためには，①が異なる 2 つの正の実数解をもてばよい。その条件は

　　$D>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$

よって $D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$（④）

〔3〕

(1)　$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $y=10$ を代入して

$$10=20\log_{10}\frac{x}{x_0} \qquad \log_{10}\frac{x}{x_0}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2} \qquad \frac{x}{x_0}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

よって $x=\sqrt{10}\,x_0$ より，人の呼吸音の音圧は x_0 の $\sqrt{10}$（④）倍

(2)　$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $x=x_1,\ y=40$ を代入して

$$\log_{10}\frac{x_1}{x_0}=\frac{40}{20}=2 \qquad \frac{x_1}{x_0}=10^2 \quad \text{よって } x_1=10^2x_0$$

$y=20\log_{10}\dfrac{x}{x_0}$ に $x=x_2,\ y=80$ を代入して

$$\log_{10}\frac{x_2}{x_0}=\frac{80}{20}=4 \qquad \frac{x_2}{x_0}=10^4 \quad \text{よって } x_2=10^4x_0$$

よって，地下鉄の車内の音圧 x_2 は，静かな図書館の音圧 x_1 の

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{10^4x_0}{10^2x_0}=10^2=100\text{ 倍}$$（⑤）

（別解）

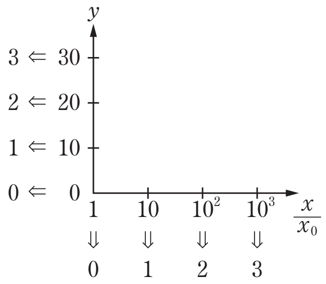
$$\log_{10}\frac{x_1}{x_0}=2,\ \log_{10}\frac{x_2}{x_0}=4$$

$$\log_{10}\frac{x_2}{x_1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}\cdot\frac{x_0}{x_1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}\cdot\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-1}=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}+\log_{10}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-1}$$

$$=\log_{10}\frac{x_2}{x_0}-\log_{10}\frac{x_1}{x_0}=4-2=2$$

よって $\frac{x_2}{x_1}=10^2=100$ より，地下鉄の車内の音圧 x_2 は，静かな図書館の音圧 x_1 の 100 倍

(3)　$\log_{10}\frac{x}{x_0}=X$，$\frac{y}{10}=Y$ とおくと



$y=20\log_{10}\frac{x}{x_0}$ すなわち $\frac{y}{10}=2\log_{10}\frac{x}{x_0}$ は

$Y=2X$ と表される。

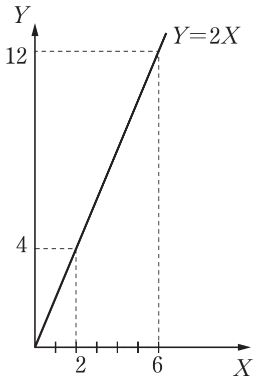
したがって，関数 $y=20\log_{10}\frac{x}{x_0}$ のグラフは，比例のグラフを表す ②

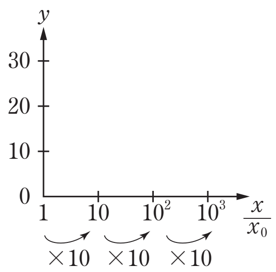
静かな図書館の音の大きさは 40 db，すなわち $y=40$ より

$Y=4$　このとき $X=2$

ジェット機の音の大きさは 120 db，すなわち $y=120$ より

$Y=12$　このとき $X=6$





X の値が 1 増加すると $\frac{x}{x_0}$ の値は 10 倍となる。

$X=2$ から $X=6$ までの X の増加量は 4 であるからジェット機の音圧は，静かな図書館の音圧の 10^4 倍（③）

第２問

⑴ ⓪～⑤のそれぞれにおいて，点Ｐの x 座標 s，y 座標 t を $s^2-t<0$ に代入して成立するものは ① と ③

（別解） $s^2-t<0$ すなわち $t>s^2$ が成立

$\Longleftrightarrow$ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が $y>x^2$ の表す領域にある。

$\Longleftrightarrow$ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が放物線 $y=x^2$ の上側の部分にある。

これを満たすものは ① と ③

⑵ 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通り，傾きが m である直線 ℓ の方程式は

$\ell : y=m(x-s)+t$ すなわち $y=mx-ms+t$ （①）

⑴より直線 ℓ と放物線 C は異なる２点で交わる。その２点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とする。

２つの交点Ａ，Ｂの x 座標 α，β は，x についての２次方程式

$x^2=mx-ms+t$ つまり $x^2-mx+ms-t=0$ （⓪）

の２つの実数解である。したがって，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m$ （③），$\alpha\beta=ms-t$ （①）

⑶ $S(m)=\int_\alpha^\beta\{(mx-ms+t)-x^2\}\,dx$

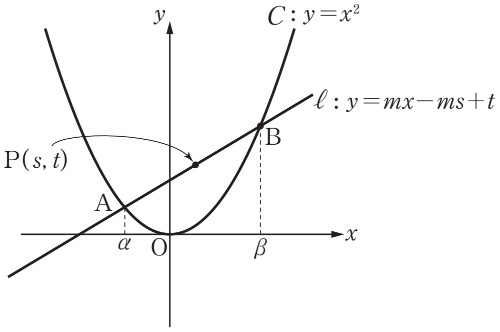
$=-\int_\alpha^\beta(x^2-mx+ms-t)\,dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-\left\{-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}\right\}$

$=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$=\dfrac{\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}}{6}$



ここで $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(ms-t)=m^2-4ms+4t$ より

$$S(m)=\frac{(m^2-4ms+4t)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$m^2-4ms+4t=(m-2s)^2-4s^2+4t$ より，$m=2s$ のときに $S(m)$ は最小となる。

このとき $s=\dfrac{m}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であり，３点Ａ，Ｂ，Ｐが一直線上にあることから，点Ｐは線分ABの中点である（③）

(4)　$m=2s$ のとき，直線 ℓ：$y=2sx-2s^2+t$ を，$y=ax+b$ とおく。この直線 ℓ と３次関数 L：$y=x^3-cx^2+18x-15$ のグラフの共有点の x 座標は，３次方程式

$$x^3-cx^2+18x-15=ax+b \text{ つまり } x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)=0$$

の実数解であり，それは $y=f(x)=x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。

(i)　グラフより $y=f(x)$ のグラフと x 軸は，$x=2$ で接し，$x=4$ で交点をもつ。したがって，直線 ℓ と曲線 L は，x 座標が２である点で接し（③），x 座標が４である点で交わる。

(ii)　関数 $f(x)$ の３次の係数が１であることから

$$f(x)=(x-2)^2(x-4) \quad (⓪)$$

とおくことができ，展開して整理すると　$f(x)=x^3-8x^2+20x-16$

これと，$f(x)=x^3-cx^2+18x-15-(ax+b)=x^3-cx^2+(18-a)x-(15+b)$ を係数比較して

$$\begin{cases} c=8 \\ 18-a=20 \\ 15+b=16 \end{cases} \qquad \text{よって} \quad a=-2,\ b=1,\ c=8$$

また，直線 ℓ：$y=2sx-2s^2+t$ を，$y=ax+b$ とおいたことから，

$2s=a$，$-2s^2+t=b$

よって　$s=-1$，$t=3$　　したがって，点Ｐの座標は $(-1,\ 3)$

第8講　実践演習問題 第3問・第4問

第3問

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$ ……①

(i)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，①より $b_{n+1}=b_n+3$　(❶)

(ii)　数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$，公差 3 の等差数列

(iii)　$b_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

したがって，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3n-1}$　(❹)

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1-a_n}$ ……②

②において $a_{n+1}=0$ とすると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ である自然数 n が存在すると仮定すると，

$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$ である。

これは $a_1=3$ に反する。よって，すべての自然数 n に関して $a_n=0$ となることはない。

(i)　②の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1-a_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}-1 \quad (❸)$$

(ii)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=b_n-1$，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $\dfrac{1}{3}$，公差 -1 の等差数列

よって，$b_n=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot(-1)=-n+\dfrac{4}{3}=\dfrac{4-3n}{3}$

したがって，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3}{4-3n}$　(❸)

(iii)　$S=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{2^2}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{a_n}$ とおくと，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ より

$$S=b_1\cdot 1+b_2\cdot 2+b_3\cdot 2^2+\cdots\cdots+b_n\cdot 2^{n-1}$$

$$2S=\qquad b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\cdots\cdots+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}+b_n\cdot 2^n$$

辺々引いて

$$-S=b_1+(b_2-b_1)\cdot 2+(b_3-b_2)\cdot 2^2+\cdots\cdots+(b_n-b_{n-1})\cdot 2^{n-1}-b_n\cdot 2^n$$

$=b_1-1\cdot(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})-b_n\cdot 2^n$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-\dfrac{4-3n}{3}\cdot 2^n$

$=\dfrac{1-3\cdot 2^n+6+(3n-4)\cdot 2^n}{3}=\dfrac{(3n-7)\cdot 2^n+7}{3}$

したがって，$S=\dfrac{(7-3n)\cdot 2^n-7}{3}$

(3)　$a_1=\dfrac{6}{5}$，$a_{n+1}=-\dfrac{a_n-1}{6a_n-10}+1$ ……③

③より　$a_{n+1}-1=-\dfrac{a_n-1}{6(a_n-1)-4}$

$b_n=a_n-1$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{6b_n-4}=\dfrac{b_n}{4-6b_n}$（⓵），$b_1=a_1-1=\dfrac{1}{5}$

⑵同様，すべての自然数 n で $b_n\fallingdotseq 0$

両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{4-6b_n}{b_n}=\dfrac{4}{b_n}-6$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおくと　$c_{n+1}=4c_n-6$（⓵）……④，$c_1=\dfrac{1}{b_1}=5$

④は $c_{n+1}-2=4(c_n-2)$ と変形できる。

数列 $\{c_n-2\}$ は，初項 $c_1-2=3$，公比 4 の等比数列（⓪）である。

よって，$c_n-2=3\cdot 4^{n-1}$ より　$c_n=3\cdot 4^{n-1}+2$

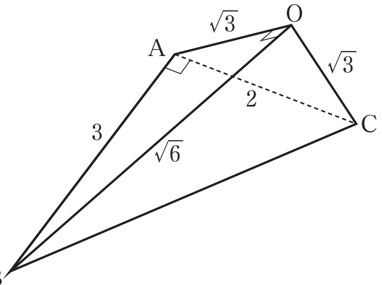
$b_n=\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}$，$a_n-1=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}+1=\dfrac{4}{3\cdot 4^n+8}+1$

第4問

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

(i)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$



$=6+0+3=9$　　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=3-2+3=4$　　よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$

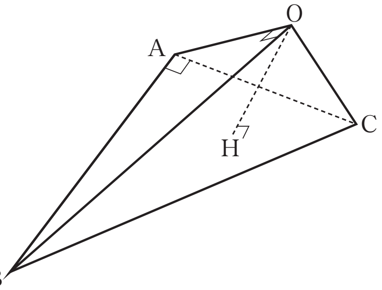
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-2-0-1+3=0$

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=0$　　よって　$\theta=90^\circ$

したがって，△ABC の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$

(ii)　頂点 O から△ABCに垂線 OH をひくと，



点 H は 3 点 A，B，C を通る平面上にあるので，実数 x，y を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　（②）

と表される。よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-x-y)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　（⑤）と表される。

OH⊥平面 ABC より，直線 OH は辺 AB と辺 AC の両方に垂直である（⑥）ことを利用すると，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+x|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=0-3=-3$，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$-3+9x=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より　$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+y|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2=1-3=-2$，

$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$$-2+4y=0 \quad よって \quad y=\frac{1}{2}$$

したがって，$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{6}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)$

$$|\overrightarrow{OH}|^2=\left|\frac{1}{6}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)\right|^2=\frac{1}{6^2}\left|\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{6^2}\left(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{6^2}(3+24+27+0-24+6)=1 \quad よって，|\overrightarrow{OH}|=1$$

以上より，四面体 OABC の体積 V は $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$

(2)　$4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ より

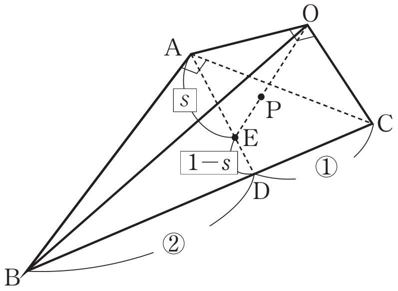
$$4\overrightarrow{OP}+2\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)+2\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC} \quad よって \quad \overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}+\frac{2}{3}s\vec{c} \quad \cdots\cdots①$$



$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OE}$ より，$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OP}$（$t$ は実数）

とおくと，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{9}t\vec{a}+\frac{1}{9}t\vec{b}+\frac{2}{9}t\vec{c} \quad \cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は１次独立かついずれも $\vec{0}$ ではないので，①，②より

$$\begin{cases} 1-s=\frac{2}{9}t \\ \frac{1}{3}s=\frac{1}{9}t \\ \frac{2}{3}s=\frac{2}{9}t \end{cases}$$

これらをすべて満たす s，t は $s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{9}{5}$

したがって，$\overrightarrow{OE}=\frac{9}{5}\overrightarrow{OP}$ より $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{9}\overrightarrow{OE}$　　したがって　$k=\frac{5}{9}$

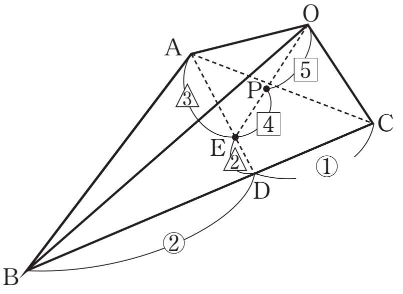
以上より，$s=\frac{3}{5}$，$k=\frac{5}{9}$（①）であり，辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P（③）である。

(3)(i)　(四面体 PABC の体積)

$=$(四面体 OABC の体積)$\times\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{OE}}$

$=V\times\dfrac{4}{9}$

$=\dfrac{4}{9}$



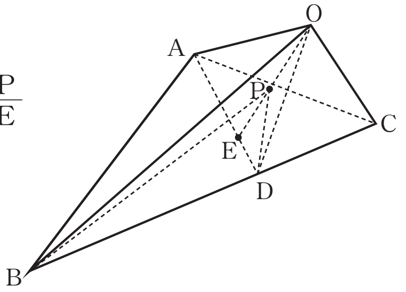
(四面体 POBD の体積)

$=$(四面体 BOAD の体積)$\times\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\times\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}}$

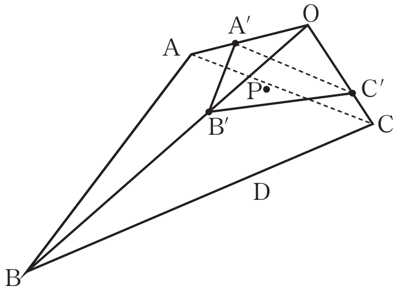
$=$(四面体 OABC の体積)$\times\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\times\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}}$

$=V\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{9}$

$=\dfrac{4}{27}$



(ii)　$\mathrm{A'B'}=\mathrm{B'C'}=\mathrm{C'A'}$ より，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は正三角形。$\mathrm{PA'}=\mathrm{PB'}=\mathrm{PC'}$ より，点 P は $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の外心。



正三角形の外心と重心は一致するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$

$$=\frac{p}{3}\vec{a}+\frac{q}{3}\vec{b}+\frac{r}{3}\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立かついずれも $\vec{0}$ ではないので，

この式と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$ より

$$\begin{cases}\dfrac{p}{3}=\dfrac{2}{9}\\[2mm] \dfrac{q}{3}=\dfrac{1}{9}\\[2mm] \dfrac{r}{3}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

よって，$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$　(⑦)